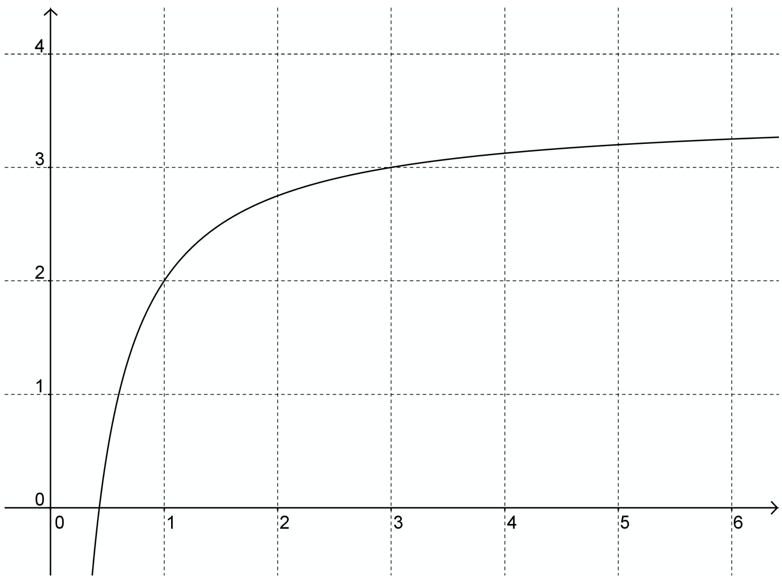
TS1 – NOM : _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ *2013/2014*

Contrôle de Mathématiques n°2

I Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par son terme initial $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 3}{2u_n}$.

On a représenté ci-dessous le graphe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{7x-3}{2x}$, définie sur $]0; +\infty[$.



1. (a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$. En déduire que f est croissante sur $]0; +\infty[$.

   (b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ par le calcul. Comment interpréter graphiquement le résultat ?

2. (a) Dans le repère ci-dessus, construire sur l'axe $(\mathrm{O}x)$ les points d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

   (b) Que peut-on conjecturer quant à la monotonie et la convergence de la suite (u_n) ?

3. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1; 3]$.

4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\left(u_n - \frac{1}{2}\right)(3 - u_n)}{u_n}$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

5. On pose $w_n = 3 - u_n$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \dfrac{w_n}{2u_n}$.

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} w_n$.

   (c) Grâce à un raisonnement par récurrence, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

   (d) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 - \dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant u_n \leqslant 3$ puis conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

$\boxed{\textbf{II}}$ Déterminer, en apportant toutes les justifications nécessaires, la limite de la suite (u_n) dans chaque cas :

1) $u_n = 2n^2 - \dfrac{4}{\sqrt{n}} - 100$

2) $u_n = 5n^4 - 4n^5$

3) $u_n = \dfrac{3n - n^4}{n^3 + n + 1}$

4) $u_n = \dfrac{n - \sqrt{n}}{n^2 + 1}$

5) $u_n = \dfrac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + n}$

$\boxed{\textbf{III}}$ On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x - x^2}$.

1) Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f ?

2) Montrer que la dérivée de f sur $]0;1[$ est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{-4x^2 + 5x - 1}{2\sqrt{x - x^2}}$.

3) Dresser alors le tableau des variations de f sur $\mathscr{D}$.