Correction du contrôle n°2

I **1)** On a par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = -1\times 0 = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = n\left(2n^2-1\right)$. Or par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n^2-1\right) = +\infty$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{n^2\left(n-\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{n-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$.

- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et par produit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{n}\right) = -2\times 0 = 0$. Donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n-\dfrac{2}{n}\right) = +\infty$.
- On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) = 1+0+0 = 1$.
- On déduit par quotient que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{n\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(n+\frac{2}{n}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{n+\frac{2}{n}}$.

- On a par somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1+0 = 1$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et par produit $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n} = 2\times 0 = 0$, d'où par somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n+\dfrac{2}{n}\right) = +\infty$.
- On déduit par quotient que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

5) Si $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{3^n+(-1)^n}{3^n+2^n} = \dfrac{3^n\left(1+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)}{3^n\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)} = \dfrac{3^n\left[1+\left(\frac{-1}{3}\right)^n\right]}{3^n\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]} = \dfrac{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$.
Or $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ appartiennent à l'intervalle $]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, puis par somme et quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$.

II **1)** $w : x \mapsto x - x^2$ est dérivable (par somme) et strictement positive sur $]0;1[$ (faire un tableau de signes...) donc $v = \sqrt{w}$ est dérivable sur $]0;1[$ et $v'(x) = \dfrac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}} = \dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$.
On a $f = uv$ avec $u : x \mapsto x-1$ et $v : x \mapsto \sqrt{x-x^2}$ donc f est dérivable par produit sur $]0;1[$ avec $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, soit $f'(x) = 1\times\sqrt{x-x^2} + (x-1)\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} = \dfrac{2\sqrt{x-x^2}^2 + (x-1)(1-2x)}{2\sqrt{x-x^2}} = \dfrac{2(x-x^2)+x-2x^2-1+2x}{2\sqrt{x-x^2}} = \dfrac{-4x^2+5x-1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

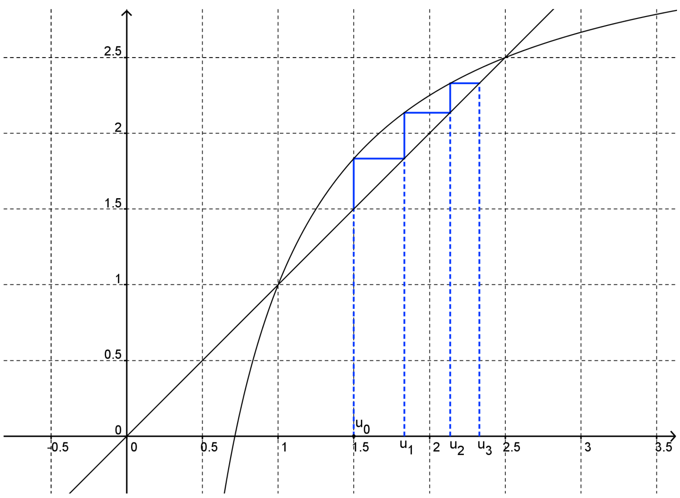
2) Si $x \in]0;1[$, on a $2\sqrt{x-x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe du trinôme $-4x^2+5x-1$. Celui-ci possède les deux racines distinctes 1 et $\frac{1}{4}$ (calculer le discriminant etc.) et :

x	0		$\frac{1}{4}$		1
$f'(x)$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$
f	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\nearrow$	0

Détails : $f(0) = (0-1)\sqrt{0-0^2} = 0$; $f(1) = (1-1)\sqrt{1-1^2} = 0$ et
$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}-1\right)\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{16}} = -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{16}} = -\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

$\boxed{\textbf{III}}$ On a $f = uv$ avec $u = w^6$, où $w : x \mapsto 2x-13$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit et $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Or $u' = 6w'w^{6-1} = 6w'w^5$, d'où $f'(x) = 6 \times 2 \times (2x-13)^5\sqrt{x} + (2x-13)^6 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{24(2x-13)^5 x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{(2x-13)^6}{2\sqrt{x}} = \dfrac{(2x-13)^5(24x+2x-13)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{(2x-13)^5(26x-13)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{13(2x-13)^5(2x-1)}{2\sqrt{x}}$.

$\boxed{\textbf{IV}}$ **1)a)**



1)b) Il semble que la suite (u_n) soit croissante et converge vers $2,5 = \frac{5}{2}$.

2) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}(n)$ la proposition : $u_n \in \left[1; \frac{5}{2}\right]$.

• On a $u_0 = 1,5 \in \left[1; \frac{5}{2}\right]$ donc $\mathfrak{P}(0)$ est vraie.

• Supposons que $\mathfrak{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $1 \leqslant u_n \leqslant \frac{5}{2}$ donc par croissance de f sur $]0; +\infty[$, on obtient $f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f\left(\frac{5}{2}\right)$. Or $f(1) = \frac{7}{2} - \frac{5}{2\times 1} = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} = 1$,

$f(u_n) = u_{n+1}$ et $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{7}{2} - \frac{5}{2\times\frac{5}{2}} = \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}$, d'où $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{5}{2}$, ce qui prouve que $\mathfrak{P}(n+1)$ est vraie.

• Cela prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \left[1; \frac{5}{2}\right]$.

3)a) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{M}(n)$ la proposition : $u_n \leqslant u_{n+1}$.

• On a $u_1 = \frac{7}{2} - \frac{5}{2u_0} = \frac{7}{2} - \frac{5}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{7}{2} - \frac{5}{3} = \frac{11}{6} \geqslant 1,5 = u_0$ donc $\mathfrak{M}(0)$ est vraie.

• Supposons que $\mathfrak{M}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $\underbrace{1 \leqslant u_n}_{\text{voir 2)}} \leqslant u_{n+1}$, donc par croissance de f sur $]0; +\infty[$, on obtient $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, soit $u_{n+1} \leqslant u_{n+1+1} = u_{n+2}$, ce qui prouve que $\mathfrak{M}(n+1)$ est vraie.

• Cela prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc bien croissante.

3)b) Comme (u_n) est croissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant u_0 = \frac{3}{2}$.

4)a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_{n+1} = \frac{5}{2} - u_{n+1} = \frac{5}{2} - \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{2u_n}\right) = -1 + \frac{5}{2u_n} = \frac{5-2u_n}{2u_n}$, d'où :
$v_{n+1} = \frac{\frac{5}{2}-u_n}{u_n} = \frac{v_n}{u_n}$.

4)b) On a $u_n \geqslant \frac{3}{2}$ donc $\frac{1}{u_n} \leqslant \frac{2}{3}$, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $v_n = \frac{5}{2} - u_n$ et $u_n \leqslant \frac{5}{2}$ donc $v_n \geqslant 0$, d'où $\frac{1}{u_n} \times v_n \leqslant \frac{2}{3} \times v_n$, soit $\frac{v_n}{u_n} \leqslant \frac{2}{3}v_n$ ou encore $v_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}v_n$.

4)c) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{R}(n)$ la proposition : $v_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

• On a $v_0 = \frac{5}{2} - u_0 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$ et $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ donc $\mathfrak{R}(0)$ est vraie.

• Supposons que $\mathfrak{R}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $v_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$, d'où $\frac{2}{3}v_n \leqslant \frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (car $\frac{2}{3} > 0$), soit $\frac{2}{3}v_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$. Or, d'après la question précédente, on a $v_{n+1} \leqslant \frac{2}{3}v_n$, d'où par transitivité de la relation d'ordre : $v_{n+1} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$, ce qui prouve que $\mathfrak{R}(n+1)$ est vraie.

• Cela prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

4)d) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant v_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ vu que $\frac{2}{3} \in]-1; 1[$. D'après le théorème “des gendarmes”, la suite (v_n) converge donc vers 0. Comme $v_n = \frac{5}{2} - u_n$, on a $u_n = \frac{5}{2} - v_n$, ce qui prouve finalement (par somme) que la suite (u_n) converge vers $\frac{5}{2} - 0 = \frac{5}{2}$.