TS2 – NOM : _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ *2012/2013*

Contrôle de Mathématiques n°2

I Déterminer, en apportant toutes les justifications nécessaires, la limite de la suite (u_n) dans chaque cas :

1) $u_n = 2 + 3n - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

2) $u_n = 2n^3 - n$

3) $u_n = \dfrac{n^3 - 2n}{n^2 + n + 1}$

4) $u_n = \dfrac{n + \sqrt{n}}{n^2 + 2}$

5) $u_n = \dfrac{3^n + (-1)^n}{3^n + 2^n}$

II On considère la fonction $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{x - x^2}$.

1) Montrer que la dérivée de f sur $]0;1[$ est la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{-4x^2 + 5x - 1}{2\sqrt{x - x^2}}$.

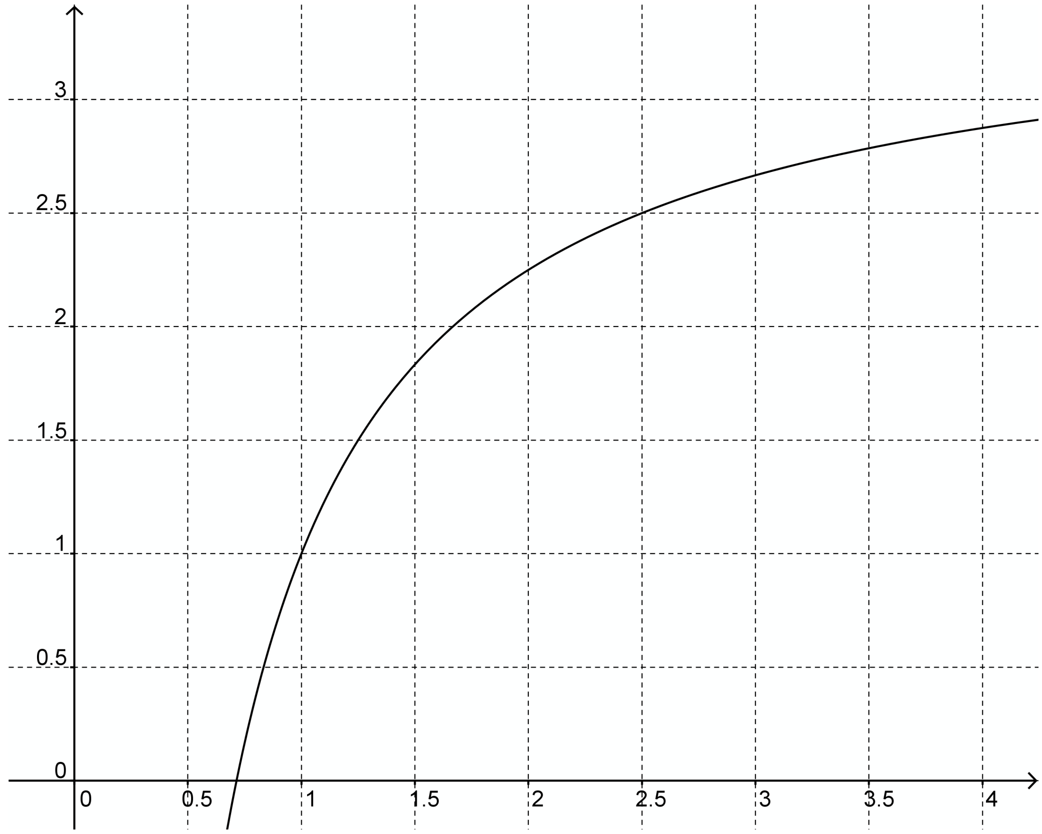
2) Dresser alors le tableau des variations de f sur $[0;1]$.

III Montrer que la fonction dérivée de $f : x \mapsto (2x - 13)^6\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction :

$$f' : x \mapsto \frac{13(2x-13)^5(2x-1)}{2\sqrt{x}} .$$

$\boxed{\textbf{IV}}$ Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par son terme initial $u_0 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{7}{2} - \dfrac{5}{2u_n}$.

On a représenté ci-dessous le graphe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{7}{2} - \dfrac{5}{2x}$.



On pourra utiliser sans démonstration le fait que f est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

1)a) Dans le repère ci-dessus, représenter sur l'axe $(\mathrm{O}x)$ les points d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

1)b) Que peut-on conjecturer quant à la monotonie et la convergence de la suite (u_n) ?

2) En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[1; \frac{5}{2}\right]$.

3)a) Prouver, en utilisant un raisonnement par récurrence, que (u_n) est une suite croissante.

3)b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \frac{3}{2}$.

4) On pose $v_n = \dfrac{5}{2} - u_n$.

4)a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{u_n}$.

4)b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{3} v_n$.

4)c) Grâce à un raisonnement par récurrence, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

4)d) Conclure quant à la convergence de la suite (v_n) puis quant à celle de la suite (u_n).