TS1 Correction du contrôle n°1 Vendredi 27 sept. 2013

$\boxed{\text{I}}$ Cf cours

$\boxed{\text{II}}$ a) Soit $x \in \mathbb{R}$; $6x^2 \geq 2(x+1)^2 \iff 3x^2 \geq (x+1)^2$ (car $2>0$)

$\iff 3x^2 \geq x^2+2x+1 \iff 2x^2-2x-1 \geq 0$ $(*)$. Le discriminant du trinôme $2x^2-2x-1$ vaut $\Delta = 12 > 0$ donc celui-ci possède les 2 racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{2-\sqrt{12}}{4} = \frac{2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{2+\sqrt{12}}{4} = \frac{2+2\sqrt{3}}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, $(*) \iff x \in \left]-\infty ; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{3}}{2} ; +\infty\right[$.

Comme $2 > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, on a en particulier $6x^2 \geq 2(x+1)^2$ dès que $x \geq 2$.

b) Notons, pour n entier ≥ 2, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $3^n \geq 2n^2$.

- Initialisation : On a $3^2 = 9 \geq 8 = 2 \times 2^2$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
- Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \geq 2$; on a $3^n \geq 2n^2$ donc $3 \times 3^n \geq 3 \times 2n^2$ (vu que $3>0$), soit : $3^{n+1} \geq 6n^2$. Or comme $n \geq 2$, le résultat du a) prouve que $6n^2 \geq 2(n+1)^2$. Par transitivité de la relation d'ordre, on obtient : $3^{n+1} \geq 2(n+1)^2$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Bilan : cela prouve par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, $3^n \geq 2n^2$.

$\boxed{\text{III}}$ 1) $4z^2 - 16z + 137 = 0$ est une équation du second degré à coefficients réels dont le discriminant vaut $\Delta = (-16)^2 - 4 \times 4 \times 137 = -1936 < 0$. Celle-ci possède donc deux solutions complexes conjuguées : $\boxed{z_1 = \frac{16 + i\sqrt{1936}}{2 \times 4} = \frac{16+44i}{8} = 2 + \frac{11}{2}i}$ et $\boxed{z_2 = \overline{z_1} = 2 - \frac{11}{2}i}$

2) Soit $z \in \mathbb{C}$; $(7-3i)z + 46i = (1+2i)(1-3z) + 34$

$$\iff (7-3i)z = 1+2i - 3(1+2i)z + 34 - 46i$$

$$\iff [7-3i+3(1+2i)]z = 35-44i \iff (10+3i)z = 35-44i$$

$$\iff z = \frac{35-44i}{10+3i} = \frac{(35-44i)(10-3i)}{(10+3i)(10-3i)} = \frac{350 - 105i - 440i - 132}{10^2 - (3i)^2}$$

$$\iff \boxed{z = \frac{218 - 545i}{100+9}} = \frac{218}{109} - \frac{545}{109}i = \boxed{2-5i}$$

3) $(*)$ $3i\bar{z} + 7 = -i - z$. Posons $z = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors :

$(*) \iff 3i(a-bi) + 7 = -i - (a+bi) \iff 3ai + 3b + 7 = -i - a - bi$

$$\iff \underbrace{(3b+7)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{3a}_{\in\mathbb{R}}\, i = \underbrace{(-a)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{(-1-b)}_{\in\mathbb{R}}\, i \iff \begin{cases} 3b+7 = -a \\ \text{et} \\ 3a = -1-b \end{cases}$$

par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe

$$\iff \begin{cases} a = -3b-7 \\ \text{et} \\ 3(-3b-7) = -1-b \end{cases} \iff \begin{cases} a = -3b-7 \\ \text{et} \\ -9b-21 = -1-b \end{cases} \iff \begin{cases} a = -3b-7 \\ \text{et} \\ 8b = -20 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -3 \times \left(-\frac{5}{2}\right) - 7 \\ \text{et} \\ b = -\frac{20}{8} = -\frac{5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ \text{et} \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases} \iff \boxed{z = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}$$

$\boxed{\text{IV}}$ 1) On a $Z = \frac{\bar{z} + 2i}{\bar{z} - 1} = \frac{x - yi + 2i}{x - yi - 1} = \frac{x + (2-y)i}{(x-1) - yi} = \frac{[x+(2-y)i][(x-1)+yi]}{[(x-1)-yi][(x-1)+yi]}$,

soit $Z = \frac{x(x-1) + xyi + (2-y)(x-1)i + y(2-y)i^2}{(x-1)^2 - (yi)^2}$

d'où $Z = \frac{x^2 - x + \cancel{xyi} + 2xi - 2i - \cancel{xyi} + yi - 2y + y^2}{(x-1)^2 + y^2}$

et finalement : $Z = \underbrace{\dfrac{x^2+y^2-x-2y}{(x-1)^2+y^2}}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\dfrac{y+2x-2}{(x-1)^2+y^2}}_{\in \mathbb{R}} i$, d'où le résultat attendu.

2) Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ et M le point d'affixe z.

Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \operatorname{Re} Z = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2-x-2y}{(x-1)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-x-2y=0$

$\Leftrightarrow x^2-x+y^2-2y=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 - 1^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2};1\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$, privé du point d'affixe 1.

3) Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ et M le point d'affixe z.

Z est réel $\Leftrightarrow \operatorname{Im} Z = 0 \Leftrightarrow \dfrac{y+2x-2}{(x-1)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow y+2x-2=0 \Leftrightarrow y=-2x+2$

$\Leftrightarrow$ M appartient à la droite d'équation $y=-2x+2$, privée du point d'affixe 1.

$\boxed{\text{V}}$ 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $z_{n+1} = i z_n + i + 1$ donc :

$z_1 = i z_0 + i + 1 = i \times 3i + i + 1 = -2+i$,

$z_2 = i z_1 + i + 1 = i(-2+i) + i + 1 = -i$ et

$z_3 = i z_2 + i + 1 = i \times (-i) + i + 1 = 2+i$.

2) Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $z_n = 2 \times i^{n+1} + i$

• <u>Initialisation</u> : On a $2 \times i^{0+1} + i = 2i + i = 3i = z_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• <u>Hérédité</u> : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$;

On a $z_n = 2 \times i^{n+1} + i$ donc $z_{n+1} = i z_n + i + 1 = i\left(2 \times i^{n+1} + i\right) + i + 1$

d'où $z_{n+1} = 2 \times i^{n+2} - 1 + i + 1$, soit $z_{n+1} = 2 \times i^{n+2} + i$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Bilan : cela prouve par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.