TS1 *2013/2014*

$\boxed{\text{Contrôle n°1}}$

$\boxed{\textbf{I}}$ (Question de cours)

Si z et z' sont deux nombres complexes, on admet qu'on a :

$$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \qquad \text{et} \qquad \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}} \quad (\text{si } z \neq 0)\ .$$

Démontrer la propriété suivante : si $z \in \mathbb{C}$, alors pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, on a $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

$\boxed{\textbf{II}}$ **a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x : $6x^2 \geqslant 2(x+1)^2$.

b) Prouver, en raisonnant par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $3^n \geqslant 2n^2$.

$\boxed{\textbf{III}}$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z :

1) $4z^2 - 16z + 137 = 0$

2) $(7 - 3\,\mathrm{i})z + 46\,\mathrm{i} = (1 + 2\,\mathrm{i})(1 - 3z) + 34$

3) $3\,\mathrm{i}\,\overline{z} + 7 = -\mathrm{i} - z$

(Pour chacune des équations précédentes, on donnera les solutions sous forme algébrique.)

$\boxed{\textbf{IV}}$ Si z est un nombre complexe distinct de 1, on note $Z = \dfrac{\overline{z} + 2\,\mathrm{i}}{\overline{z} - 1}$.

1) On note $x = \mathfrak{Re}(z)$ et $y = \mathfrak{Im}(z)$ [de sorte que $z = x + y\,\mathrm{i}$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$].

Prouver que : $\mathfrak{Re}(Z) = \dfrac{x^2 + y^2 - x - 2y}{(x-1)^2 + y^2}$ et $\mathfrak{Im}(Z) = \dfrac{y + 2x - 2}{(x-1)^2 + y^2}$.

2) Déterminer les points du plan complexe d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur.

3) Déterminer les points du plan complexe d'affixe z que Z soit réel.

$\boxed{\textbf{V}}$ On définit la suite à termes complexes (z_n) définie par $z_0 = 3\,\mathrm{i}$ et la relation de récurrence : $z_{n+1} = \mathrm{i}\,z_n + \mathrm{i} + 1$.

1) Calculer z_1, z_2 et z_3.

2) Prouver, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$z_n = 2 \times \mathrm{i}^{n+1} + \mathrm{i}\ .$$

3) Donner la forme algébrique de z_{2013} .