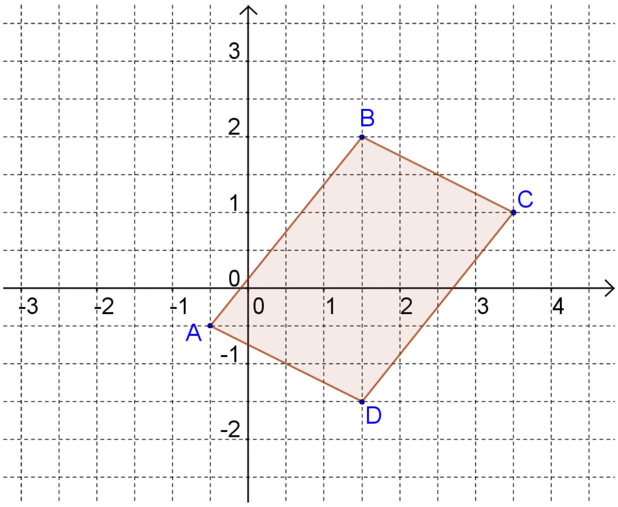
Correction du contrôle n°1

I



1) On a $z_C = \frac{7}{2} + i$.

2)a) (ABCD est un parallélogramme) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$

2)b) D'après la relation précédente, on a $z_D = z_C + z_A - z_B$, soit :

$z_D = \frac{7}{2} + i + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) - \left(\frac{3}{2} + 2i\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$.

II

1) $(9 + 5i)z + (1 + i)(7z - 1) = 16 - 7i$

$\Leftrightarrow (9 + 5i)z + (7 + 7i)z - 1 - i = 16 - 7i$

$\Leftrightarrow (16 + 12i)z = 17 - 6i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{17 - 6i}{16 + 12i} = \dfrac{(17 - 6i)(16 - 12i)}{(16 + 12i)(16 - 12i)} = \dfrac{272 - 204i - 96i - 72}{16^2 + 12^2}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{200 - 300i}{400} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4}i$.

2) Le discriminant de l'équation vaut $\Delta = -36 < 0$. Il y a donc deux solutions distinctes (et conjuguées) : $z_1 = \dfrac{2 + i\sqrt{36}}{2 \times 5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$ et $z_2 = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$.

3) Posons $a = \mathfrak{Re}(z)$ et $b = \mathfrak{Im}(z)$ (de sorte que $z = a + b\,i$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$).

$2\,i\,z + 3 = -3\,i + 4\,\overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad 2\,i\,(a + b\,i) + 3 = -3\,i + 4(a - b\,i)$

$\Leftrightarrow \; 2a\,i - 2b + 3 = -3\,i + 4a - 4b\,i$

$$\Leftrightarrow \underbrace{3-2b}_{\in\mathbb{R}}+\underbrace{2a}_{\in\mathbb{R}}\,\mathrm{i}=\underbrace{4a}_{\in\mathbb{R}}+(\underbrace{-3-4b}_{\in\mathbb{R}})\,\mathrm{i}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2b=4a \\ \text{et} \\ 2a=-3-4b \end{cases} \quad \text{(par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2b=4\left(-\dfrac{3+4b}{2}\right) \\ \text{et} \\ a=-\dfrac{3+4b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2b=-6-8b \\ \text{et} \\ a=-\dfrac{3+4b}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-\frac{3}{2} \\ \text{et} \\ a=-\dfrac{3+4\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}=\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad z=\tfrac{3}{2}-\tfrac{3}{2}\,\mathrm{i}$$

$\boxed{\textbf{III}}$ **1)** Le discriminant de l'équation $z^2+z+1=0$ est égal à $\Delta=-3<0$.
Celle-ci possède donc deux solutions complexes distinctes (et conjuguées) :
$\mathrm{j}=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$ et $\bar{\mathrm{j}}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$.

Le produit des deux solutions vaut : $\mathrm{j}\times\bar{\mathrm{j}}=\underbrace{\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right)}_{a+b}\underbrace{\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right)}_{a-b}$,

soit : $\mathrm{j}\times\bar{\mathrm{j}}=\underbrace{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right)^2}_{a^2-b^2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=1$.

2) • Comme j est solution de l'équation $z^2+z+1=0$, on a : $\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1=0$. D'où :
$\mathrm{j}^2=-\mathrm{j}-1=-\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right)-1=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}=\bar{\mathrm{j}}$.

• On a $\mathrm{j}^3=\mathrm{j}\times\mathrm{j}^2\underbrace{=}_{\text{voir point précédent}}\mathrm{j}\times\bar{\mathrm{j}}\underbrace{=}_{\text{voir question 1)}}1$.

3) On a $\mathrm{j}^{2013}=\mathrm{j}^{3\times 671}=\left(\mathrm{j}^3\right)^{671}=1^{671}=1$.

$\boxed{\textbf{IV}}$ Soit z un nombre complexe distinct de -1, $x=\mathfrak{Re}(z)$ et $y=\mathfrak{Im}(z)$.

On a $Z=\dfrac{\mathrm{i}\,\overline{z}-1}{\overline{z}+1}=\dfrac{\mathrm{i}\,(x-y\,\mathrm{i})-1}{(x-y\,\mathrm{i})+1}=\dfrac{y-1+x\,\mathrm{i}}{x+1-y\,\mathrm{i}}$

$$\Rightarrow \quad Z=\frac{[(y-1)+x\,\mathrm{i}]\times[(x+1)+y\,\mathrm{i}]}{[(x+1)-y\,\mathrm{i}]\times[(x+1)+y\,\mathrm{i}]}$$

$$\Rightarrow \quad Z=\frac{(y-1)(x+1)+y(y-1)\,\mathrm{i}+x(x+1)\,\mathrm{i}-xy}{(x+1)^2-(y\,\mathrm{i})^2}$$

$$\Rightarrow \quad Z=\frac{yx+y-x-1-xy+(y^2-y+x^2+x)\,\mathrm{i}}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \underbrace{\frac{y-x-1}{(x+1)^2+y^2}}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\frac{y^2-y+x^2+x}{(x+1)^2+y^2}}_{\in\mathbb{R}} \mathrm{i}$$

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{Re}(Z) = \frac{y-x-1}{(x+1)^2+y^2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(Z) = \frac{y^2-y+x^2+x}{(x+1)^2+y^2} .$$

2) Z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{Re}(Z) = 0$ $\Leftrightarrow$ $y - x - 1 = 0$.
Ainsi l'ensemble des points d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur, est la droite d'équation $y = x + 1$, privée du point d'affixe -1 [c'est-à-dire de coordonnées $(-1; 0)$].

3) Z est réel $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{Im}(Z) = 0$ $\Leftrightarrow$ $y^2 - y + x^2 + x = 0$
$\Leftrightarrow$ $\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$
$\Leftrightarrow$ $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow$ le point d'affixe z appartient au cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, privé du point d'affixe -1 [c'est-à-dire de coordonnées $(-1; 0)$] .

$\boxed{\textbf{V}}$ **1)** On a $u_1 = u_{0+1} = 3u_0 - 10 \times 0 + 5 = 3 \times 2 + 5 = 11$,
$u_2 = u_{1+1} = 3u_1 - 10 \times 1 + 5 = 3 \times 11 - 10 + 5 = 28$ et
$u_3 = u_{2+1} = 3u_2 - 10 \times 2 + 5 = 3 \times 28 - 20 + 5 = 69$.

2)Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathfrak{P}(n)$ la proposition : $u_n = 5n + 2 \times 3^n$.

- **Initialisation** : On a $u_0 = 2$ et $5 \times 0 + 2 \times 3^0 = 0 + 2 \times 1 = 2$, donc $\mathfrak{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons que $\mathfrak{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. On a donc $u_n = 5n + 2 \times 3^n$. Or $u_{n+1} = 3u_n - 10n + 5$, donc $u_{n+1} = 3\left(5n + 2 \times 3^n\right) - 10n + 5 = 15n + 2 \times \underbrace{3^n \times 3}_{3^{n+1}} - 10n + 5 = 5n + 5 + 2 \times 3^{n+1}$, d'où $u_{n+1} = 5(n+1) + 2 \times 3^{n+1}$, ce qui établit que $\mathfrak{P}(n+1)$ est vraie.
- On a prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 5n + 2 \times 3^n$.

3)a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = u_n - 5n$. En particulier, on a $v_0 = u_0 - 5 \times 0 = 2$.
On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 5(n+1)$ et $u_{n+1} = 3u_n - 10n + 5$ donc $v_{n+1} = 3u_n - 10n + 5 - 5(n+1) = 3u_n - 15n$, soit $v_{n+1} = 3(\underbrace{u_n - 5}_{v_n})$, ou encore $v_{n+1} = 3v_n$. Cette dernière relation, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouve que la suite (v_n) est géométrique (de raison 3).

3)b) Comme (v_n) est géométrique de raison 3, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times 3^n$, soit $v_n = 2 \times 3^n$.
D'autre part, comme $v_n = u_n - 5n$, on a $u_n = 5n + v_n$. D'où $u_n = 5n + 2 \times 3^n$, ce qui correspond bien au résultat trouvé à la question 2).

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (5\times 0 + 2\times 3^0) + (5\times 1 + 2\times 3^1) + \cdots + (5\times n + 2\times 3^n)$

En permutant les termes dans la somme, on obtient :

$S = (5\times 0 + 5\times 1 + \cdots + 5\times n) + (2\times 3^0 + 2\times 3^1 + \cdots + 2\times 3^n)$

soit : $S = 5\times(0 + 1 + \cdots + n) + 2\times(3^0 + 3^1 + \cdots + 3^n)$

ou encore : $S = 5\times\dfrac{n(n+1)}{2} + 2\times\dfrac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{5}{2}n(n+1) + 3^{n+1} - 1 = 3^{n+1} + \frac{5}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 1$.