TS2 *2012/2013*

Contrôle n°1

I On se place dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soit A et B les points d'affixes respectives $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$ et $\frac{3}{2} + 2\,\mathrm{i}$.
C est le point de coordonnées $\left(\frac{7}{2}, 1\right)$.

1) Placer les points A, B et C. Quelle est l'affixe du point C ?

2) D est le point du plan tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

2)a) Quelle relation doivent vérifier les affixes z_{A}, z_{B}, z_{C} et z_{D} des points A, B, C et D ?

2)b) Déterminer l'affixe du point D. Placer D.

II Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z :

1) $(9 + 5\,\mathrm{i})z + (1 + \mathrm{i})(7z - 1) = 16 - 7\,\mathrm{i}$

2) $5z^2 - 2z + 2 = 0$

3) $2\,\mathrm{i}\,z + 3 = -3\,\mathrm{i} + 4\,\overline{z}$

(Pour chacune des équations précédentes, on donnera les solutions sous forme algébrique.)

III **(Bonus)** **1)** Montrer que l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ possède deux solutions complexes distinctes dont le produit vaut 1. On notera j celle des deux solutions dont la partie imaginaire est positive.

2) Prouver que $\mathrm{j}^2 = \bar{\mathrm{j}}$. En déduire que $\mathrm{j}^3 = 1$.

3) Donner la forme algébrique de j^{2013}.

IV Si z est un nombre complexe distinct de -1, on note $Z = \dfrac{\mathrm{i}\,\overline{z} - 1}{\overline{z} + 1}$.

1) On note $x = \mathfrak{Re}(z)$ et $y = \mathfrak{Im}(z)$ [de sorte que $z = x + y\,\mathrm{i}$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$].
Prouver que : $\mathfrak{Re}(Z) = \dfrac{y - x - 1}{(x+1)^2 + y^2}$ et $\mathfrak{Im}(Z) = \dfrac{y^2 - y + x^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}$.

2) Déterminer les points du plan complexe d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur.

3) Déterminer les points du plan complexe d'affixe z que Z soit réel.

$\boxed{\textbf{V}}$ On définit la suite numérique (u_n) par son terme initial $u_0 = 2$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = 3u_n - 10n + 5$.
Le but de l'exercice est d'exprimer explicitement u_n en fonction de n. Une méthode distincte est proposée dans chacune des questions 2) et 3), qui doivent donc se traiter de manière indépendante.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) Méthode n°1 : en raisonnant par récurrence.
Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = 5n + 2 \times 3^n$.

3) Méthode n°2 : en utilisant une suite annexe géométrique.
3)a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 5n$. Établir que la suite (v_n) est géométrique.
3)b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer v_n en fonction de n. Retrouver alors le résultat obtenu à la question 2).

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n.