TS2 - Devoir de Mathématiques à rendre lundi 12 novembre 2012

I • **Partie A**

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$.

1) Montrer que f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et calculer sa dérivée.

2) Dresser le tableau des variations de f sur $[0;+\infty[$.

3) Tracer précisément (avec l'appoint éventuel d'un tableau de valeurs obtenu avec la calculatrice) le graphe de f dans un repère orthonormé (unité imposée : 5 cm).

• **Partie B**

Soit (u_n) la suite définie par son terme initial $u_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \; .$$

1)a) Construire dans le repère de la partie A les points de l'axe (Ox) d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

1)b) Quelles conjectures peut-on formuler quant à la monotonie et la convergence de (u_n) ?

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [0;1]$.

3)a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que : $1 - u_{n+1} = \dfrac{1-u_n}{2\left(1+\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\right)}$.

3)b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1-u_n}{2}$.

3)c) Prouver alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3)d) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

• **Partie C**

Établir* que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$. En quoi cela est-il cohérent avec le résultat obtenu à la question B.3.d. ?

(*Indication : on pourra utiliser la formule, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.)

II Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\sqrt{2}\cos x - \cos(2x)$.

1) Montrer que f est paire et $2\pi-$périodique. Quelles conséquences graphiques cela a-t-il sur le graphe de f ?

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 4\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x$.

3) Dresser le tableau des variations de f sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

4) En choisissant une échelle adaptée, tracer précisément le graphe de f sur $[-2\pi;4\pi]$ dans un repère orthogonal.