TS2 - Correction du devoir de Mathématiques à rendre le 12/10/12

$\boxed{\textbf{I}}$ **• Partie A**

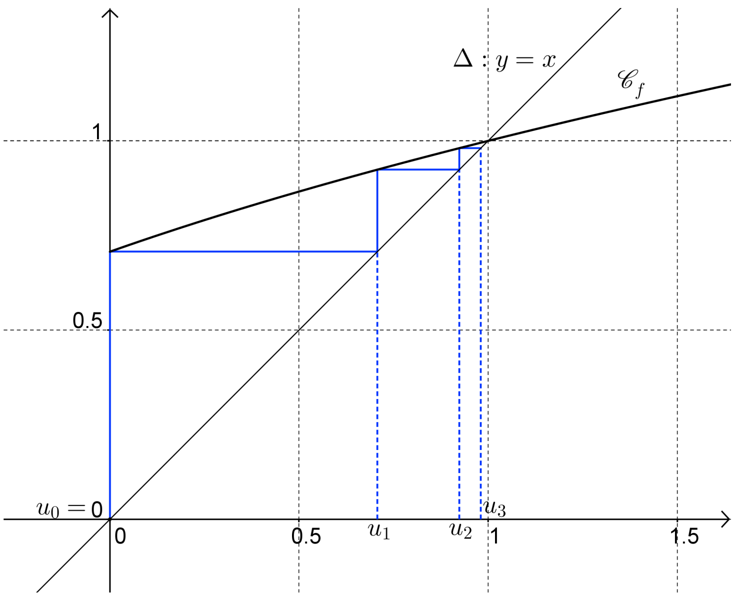
1) $u : x \mapsto \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ est dérivable (car affine) et strictement positive sur $[0;+\infty[$ donc $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ de dérivée $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$. Ainsi si $x \in [0;+\infty[$, on a $f'(x) = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{x+1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{8x+8}}$.

2) Si $x \in [0;+\infty[$, on a $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
f	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	

(Détail : $f(0) = \sqrt{\frac{1+0}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

3)



• Partie B

1)b) Il semble que la suite (u_n) soit croissante et converge vers 1.

2) Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathfrak{P}(n)$: $u_n \in [0;1]$.

- On a $u_0 = 0 \in [0;1]$ donc $\mathfrak{P}(0)$ est vraie.
- Supposons que $\mathfrak{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ donc par

croissance de la fonction f sur $[0;+\infty[$, $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$. Or $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = \sqrt{\frac{1+1}{2}} = \sqrt{1} = 1$ donc $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, d'où $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ (vu que $\frac{\sqrt{2}}{2} \geqslant 0$), ce qui prouve que $\mathfrak{P}(n+1)$ est vraie.

• Cela prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.

3)a) Si $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 - u_{n+1} = 1 - \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$. D'où :

$$1 - u_{n+1} = \frac{\left(1-\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\right)\left(1+\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\right)}{1+\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}} = \frac{1^2-\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}^2}{1+\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}} = \frac{1-\frac{1+u_n}{2}}{1+\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}},$$

soit : $1 - u_{n+1} = \dfrac{\frac{1-u_n}{2}}{1+\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}} = \dfrac{1-u_n}{2\left(1+\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\right)}$.

3)b) On a $\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \geqslant 0$ donc $1 + \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \geqslant 1$ d'où $\frac{1}{1+\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}} \leqslant \frac{1}{1} = 1$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. Or $u_n \in [0;1]$ donc $u_n \leqslant 1$ et $\frac{1-u_n}{2} \geqslant 0$, on a par conséquent : $\frac{1-u_n}{2} \times \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}} \leqslant \frac{1-u_n}{2} \times 1$, soit $\frac{1-u_n}{2\left(1+\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}\right)} \leqslant \frac{1-u_n}{2}$, c'est-à-dire : $1 - u_{n+1} \leqslant \frac{1-u_n}{2}$.

3)c) Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathfrak{R}(n)$: $1 - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

• On a $1 - u_0 = 1 - 0 = 1$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ donc $1 - u_0 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0$, ce qui prouve que $\mathfrak{R}(0)$ est vraie.

• Supposons que $\mathfrak{R}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $1 - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $\frac{1}{2} \times (1 - u_n) \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (car $\frac{1}{2} > 0$), soit $\frac{1-u_n}{2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Or d'après la question précédente, $1 - u_{n+1} \leqslant \frac{1-u_n}{2}$ donc par transitivité de la relation d'ordre, on obtient $1 - u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, ce qui établit que $\mathfrak{R}(n+1)$ est vraie.

• Cela prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3)d) • On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \underbrace{\leqslant}_{\text{voir B.2.}} 1 - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Comme $\frac{1}{2} \in]-1;1[$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc d'après le théorème « des gendarmes », $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1 - u_n) = 0$.

• On a $u_n = 1 - (1 - u_n)$ donc par somme, la suite (u_n) converge vers $1 - 0 = 1$.

• Partie C

Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{B}(n)$ la proposition $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

• On a $\cos\left(\frac{\pi}{2^{0+1}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = u_0$, donc $\mathfrak{B}(0)$ est vraie.

• Supposons que $\mathfrak{B}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$. Si $x \in \mathbb{R}$, on sait que $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ donc $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$. En posant $x = \frac{\pi}{2^{n+2}}$, on obtient $\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{1+\cos\left(2\times\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{2}$, soit $\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2}$, d'où $\frac{1+u_n}{2} = \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ $(\natural)$.

Or $2^{n+2} \geqslant 4$ donc $\frac{\pi}{2^{n+2}} \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, d'où $\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \geqslant 0$; on déduit de la relation $(\natural)$ que $\sqrt{\frac{1+u_n}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ et donc que $u_{n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1+1}}\right)$, ce qui montre que $\mathfrak{B}(n+1)$ est vraie.

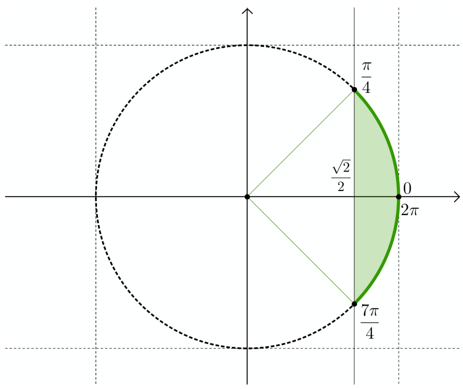
• Cela prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

Ce résultat est cohérent avec le fait que (u_n) converge vers 1. En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{2^{n+1}} = 0$ (par quotient car $2 \in]1;+\infty[$) donc il est logique de penser que (u_n) converge vers $\cos 0 = 1$ (même si ce n'est pas si évident que cela, comme nous le verrons dans le chapitre consacré à la *continuité*).

$\boxed{\textbf{II}}$ **1)** • Si $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = 2\sqrt{2}\cos(-x) - \cos(-2x)$. Comme la fonction cos est paire, on a $\cos(-x) = \cos x$ et $\cos(-2x) = \cos(2x)$ donc $f(-x) = 2\sqrt{2}\cos x - \cos(2x) = f(x)$, ce qui prouve que f est une fonction paire. Le graphe de f est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
• Si $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+2\pi) = 2\sqrt{2}\cos(x+2\pi) - \cos[2(x+2\pi)]$, soit :
$f(x+2\pi) = 2\sqrt{2}\cos(x+2\pi) - \cos(2x+2\times 2\pi)$. Or la fonction cos est $2\pi-$périodique donc $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\cos(2x+2\times 2\pi) = \cos(2x)$ d'où $f(x+2\pi) = 2\sqrt{2}\cos x - \cos(2x) = f(x)$, ce qui établit que f est une fonction $2\pi-$périodique : son graphe est donc invariant par translation de vecteur $2\pi\,\overrightarrow{i}$.

2) On a $f'(x) = 2\sqrt{2}(-\sin x) - 2\times\cos'(2x) = -2\sqrt{2}\sin x + 2\sin(2x)$.
Or $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ donc $f'(x) = 4\sin x\cos x - 2\sqrt{2}\sin x = 4\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x$.

3) Si $x \in [0;2\pi]$, $\quad \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$.



D'où :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$\sin x$	0		$+$		0		$-$		0
$\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

Et finalement :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		π		$\frac{7\pi}{4}$		2π
f			2				2		
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	$2\sqrt{2}-1$				$-2\sqrt{2}-1$				$2\sqrt{2}-1$

(Détails :

$f(0) = 2\sqrt{2}\cos 0 - \cos 0 = 2\sqrt{2} - 1$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2} = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = 2$

$f(\pi) = 2\sqrt{2}\cos\pi - \cos 2\pi = -2\sqrt{2} - 1$

$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{4} - \cos\frac{7\pi}{2} = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = 2$)

4)