TS1 – Correction du contrôle n°5 de MATHÉMATIQUES

I **1)a)** h est dérivable (donc également continue) sur $\mathbb{R}$ par produit et somme et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$. On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		4		α		$+\infty$
$3x$		$-$	0	$+$				$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0			$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0			$+$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	-6	$\searrow$	-38	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

((détails : $h(0) = 0^3 - 6 \times 0^2 - 6 = -6$ et $h(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 - 6 = -38$))

• Si $x \neq 0$, on a $h(x) = x^3\left(1 - \frac{6}{x} - \frac{6}{x^3}\right)$. Par produit et somme, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{6}{x} - \frac{6}{x^3}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.
• On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et par produit $\lim\limits_{x\to-\infty}(-6x^2) = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x^3 - 3x^2 - 6) = -\infty$.

1)b) • D'après son tableau des variations, on voit que h possède un maximum égal à -6 sur $]-\infty; 4]$. Ainsi, pour tout $x \in]-\infty; 4]$, on a $h(x) \leqslant -6 < 0$, ce qui prouve que l'équation $h(x) = 0$ ne possède aucune solution dans $]-\infty; 4]$.
• La fonction h est continue et strictement croissante sur $]4; +\infty[$; on a $h(4) = -38$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$. Or $0 \in]-38; +\infty[$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution α dans $]4; +\infty[$.
• Bilan : l'équation $h(x) = 0$ possède pour unique solution α dans $\mathbb{R}$.
• La calculatrice fournit : $6,15 < \alpha < 6,16$.

1)c) On déduit du tableau des variations de h complété (voir 1.a.) :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

2)a) • On a par somme : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2 + 1) = +\infty$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ (1).
D'autre part $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et par produit $\lim\limits_{x\to-\infty}(-9x) = +\infty$.
Donc par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2 - 9x - 4) = -\infty$ (2).

D'après (1) et (2), on déduit par produit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

• On a par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+1) = +\infty$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ $^{(3)}$.

D'autre part, si $x \neq 0$, $x^2 - 9x - 4 = x^2\left(1 - \frac{9}{x} - \frac{4}{x^2}\right)$. Par produit et somme, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{9}{x} - \frac{4}{x^2}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, on obtient par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 9x - 4) = +\infty$ $^{(4)}$.

D'après (3) et (4), on déduit par produit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2)b) On a $f = u\sqrt{v}$, où $u : x \mapsto x^2 - 9x - 4$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (par produit et somme) et $v : x \mapsto x^2 + 2$ est dérivable (par somme) et strictement positive sur $\mathbb{R}$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et produit et :

$$f' = u'\sqrt{v} + u(\sqrt{v})' = u'\sqrt{v} + u\frac{v'}{2\sqrt{v}} \ .$$

Ainsi, si $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2x-9)\sqrt{x^2+2} + (x^2 - 9x - 4)\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}$,

d'où $f'(x) = \dfrac{(2x-9)\sqrt{x^2+2}^2}{\sqrt{x^2+2}} + \dfrac{x(x^2-9x-4)}{\sqrt{x^2+2}}$,

d'où $f'(x) = \dfrac{(2x-9)(x^2+2) + x^3 - 9x^2 - 4x}{\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{2x^3 + 4x - 9x^2 - 18 + x^3 - 9x^2 - 4x}{\sqrt{x^2+2}}$,

soit $f'(x) = \dfrac{3x^3 - 18x^2 - 18}{\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{3(x^3 - 6x^2 - 6)}{\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{3h(x)}{\sqrt{x^2+2}}$.

2)c) Comme $3 > 0$ et $\sqrt{x^2+2} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $h(x)$. D'où, d'après 1.c. et 2.a. :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$\boxed{\text{II}}$ **1)a)** On a $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$ donc $g(x) = f'(x) = -\sin x - 0 + \frac{1}{2} \times 2x = x - \sin x$. On a $g'(x) = 1 - \cos x$. Or si $x \in \mathrm{I} - \{0\}$, on a $\cos x < 1$, soit $g'(x) > 0$. D'où :

x	$-\pi$		0		π
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
g		↗	0	↗	
$g(x)$		$-$	0	$+$	

1)b) On déduit de la question précédente :

x	$-\pi$		0		π
$g = f'$		$-$	0	$+$	
f	$\frac{\pi^2-4}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi^2-4}{2}$

((détails : $f(-\pi) = \cos(-\pi) - 1 + \frac{1}{2}(-\pi)^2 = \frac{\pi^2-4}{2}$
$f(\pi) = \cos(\pi) - 1 + \frac{1}{2}(\pi)^2 = \frac{\pi^2-4}{2}$
$f(0) = \cos 0 - 1 + \frac{1}{2} \times 0^2 = 0$))

On déduit du tableau des variations ci-dessus que f possède un minimum égal à 0 sur I. D'où, pour tout $x \in$ I, $f(x) \geqslant 0$ (et si $x \in \mathrm{I} - \{0\}$, $f(x) > 0$), soit $\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 \geqslant 0$, ou encore $\cos x \geqslant 1 - \frac{1}{2}x^2$.

2) On a $m(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4$ donc $n(x) = m'(x) = -\sin x + \frac{1}{2} \times 2x - \frac{1}{24} \times 4x^3$, soit $n(x) = -\sin x + x - \frac{1}{6}x^3$.

2)a) On a $n'(x) = -\cos x + 1 - \frac{1}{6} \times 3x^2 = -\cos x + 1 - \frac{1}{2}x^2 = -(\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2) = -f(x)$. On déduit de la question 1.b. :

x	$-\pi$		0		π
$n' = -f$		$-$	0	$-$	
n		$\searrow$	0	$\searrow$	
$n(x)$		$+$	0	$-$	

2)b) Le tableau de signes de $n = m'$ précédent entraîne :

x	$-\pi$		0		π
m	$(\star)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$(\star)$

((détails : $m(-\pi) = \cos(-\pi) - 1 + \frac{1}{2}(-\pi)^2 - \frac{1}{24}(-\pi)^4 = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^4}{24} - 2^{\,(\star)}$
$m(\pi) = \cos(\pi) - 1 + \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{24}\pi^4 = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^4}{24} - 2^{\,(\star)}$
$m(0) = \cos 0 - 1 + 0 - 0 = 0$))

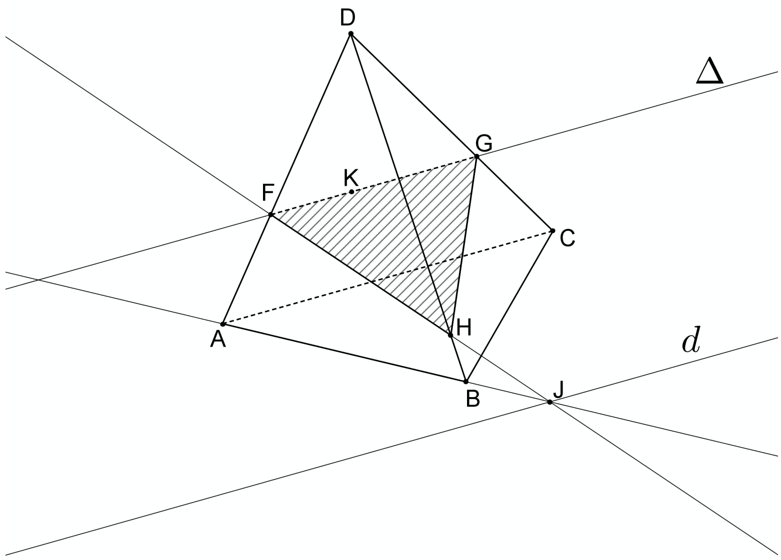
On déduit du tableau des variations ci-dessus que m possède un maximum égal à 0 sur I. D'où pour tout $x \in$ I, $m(x) \leqslant 0$, soit $\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 \leqslant 0$, ou encore $\cos x \leqslant 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$.

3) D'après les questions précédentes, on a pour tout $x \in$ I :

$$\begin{array}{rl} & 1 - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \ , \\ \text{d'où :} & -\frac{1}{2}x^2 \leqslant \cos x - 1 \leqslant -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \ , \\ \text{et si } x \neq 0 : & -\frac{1}{2} \leqslant \dfrac{\cos x - 1}{x^2} \leqslant -\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2 \text{ (car } x^2 > 0). \end{array}$$

On a $\lim\limits_{x \to 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^2\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{24} \times 0^2 = -\frac{1}{2}$ donc, d'après le théorème des gendarmes, l'inégalité précédente prouve que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

$\boxed{\textbf{III}}$



• Notons Δ la droite d'intersection de $\mathscr{P}$ avec (ACD). On a (AC)$\subset$(ACD), $d \subset \mathscr{P}$ et d//(AC) donc, d'après le théorème du toit, on a $\Delta // d$. Comme K$\in$(ACD) et K$\in \mathscr{P}$, on a K$\in \Delta$; la droite Δ est donc la parallèle à d passant par K.

• Les droites Δ et (AD) sont coplanaires (incluses dans (ACD)) et non parallèles, elles sont donc sécantes en un point F. De même, Δ et (DC) sont sécantes en un point G.

• Les droites d et (AB) étant coplanaires (incluses dans (ABC)) et non parallèles, elles sont donc sécantes en un point J.

– J$\in$(AB) et (AB)$\subset$(ABD) donc J$\in$(ABD).

– J$\in d$ et $d \subset \mathscr{P}$ donc J$\in \mathscr{P}$.

– F$\in$(AD) et (AD)$\subset$(ABD) donc F$\in$(ABD).

– F$\in \Delta$ et $\Delta \subset \mathscr{P}$ donc F$\in \mathscr{P}$.

Ainsi, J et F sont deux points distincts appartenant à la fois aux plans (ABD) et $\mathscr{P}$, donc (ABD)$\cap\mathscr{P}$ =(JF).

• Les droites (JF) et (BD) étant coplanaires (incluses dans (ABD)) et non parallèles, elles sont donc sécantes en un point H.

- $H \in (BD)$ et $(BD) \subset (BCD)$ donc $H \in (BCD)$.
- $H \in (JF)$ et $(JF) \subset \mathscr{P}$ donc $H \in \mathscr{P}$.
- $G \in (CD)$ et $(CD) \subset (BCD)$ donc $G \in (BCD)$.
- $G \in \Delta$ et $\Delta \subset \mathscr{P}$ donc $G \in \mathscr{P}$.

Ainsi, G et H sont deux points distincts appartenant à la fois aux plans (BCD) et $\mathscr{P}$, donc $(BCD) \cap \mathscr{P} = (GH)$.