Correction du devoir (à rendre le 7 mars)

I Soient a, b et c trois réels et $F : x \mapsto (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-2x}$. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition, somme et produit et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = (2ax+b)\mathrm{e}^{-2x} + (ax^2+bx+c)(-\mathrm{e}^{-2x}) = [-2ax^2+(2a-2b)x+b-2c]\mathrm{e}^{-2x} \ .$$

Or F est une primitive de $f : x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement $F' = f$, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ [-2ax^2+(2a-2b)x+b-2c]\mathrm{e}^{-2x} = (1\times x^2 + 0\times x + 0)\mathrm{e}^{-2x} \ .$$

Pour que la condition précédente soit satisfaite, il suffit que a, b et c vérifient le système suivant : $\begin{cases} -2a = 1 \\ 2a-2b = 0 \\ b-2c = 0 \end{cases}$; celui-ci possède l'unique solution $(a,b,c) = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$.

Conséquence : $F : x \mapsto \left(-\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{-2x}$ est une primitive de $f : x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.

II **a)** Soit $x \in \mathbb{R}$; on a $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)$, soit $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. Or $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, d'où $\cos(2x) = \cos^2(x) - (1-\cos^2(x))$, soit $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$. On obtient alors $2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$, d'où $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.

b) • $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2x)$, donc une primitive de $x \mapsto \cos^2(x)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\sin(2x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin(2x)$. On en déduit que :

$$\int_0^{\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\sin(2\pi) - \left(\frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{4}\sin(0)\right) = \frac{\pi}{2} \ .$$

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2x)\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$, donc une primitive de $x \mapsto \sin^2(x)$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\sin(2x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin(2x)$. On en déduit que :

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\sin(2\pi) - \left(\frac{1}{2}\times 0 - \frac{1}{4}\sin(0)\right) = \frac{\pi}{2} \ .$$

III **a)** On a $Z^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}\,\mathrm{i}\right)^2 = 2 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\mathrm{i} - (2-\sqrt{2})$ d'où $Z^2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\,\mathrm{i} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2^2 - \sqrt{2}^2}\,\mathrm{i} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,\mathrm{i}$.

b) On a $Z^4 = (Z^2)^2 = \left(2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,\mathrm{i}\right)^2 = \left[2\sqrt{2}(1+\mathrm{i})\right]^2 = 8(1 + 2\,\mathrm{i} - 1) = 16\,\mathrm{i}$.
D'autre part $Z^{2012} = Z^{4\times 503} = (Z^4)^{503} = (16\,\mathrm{i})^{503} = 16^{503}\,\mathrm{i}^{503}$.
Or $\mathrm{i}^{503} = \mathrm{i}^{500}\,\mathrm{i}^3 = \left(\mathrm{i}^4\right)^{125}\,\mathrm{i}^3 = 1^{125}\times(-\,\mathrm{i})$, d'où $Z^{2012} = -16^{503}\,\mathrm{i}$, ou encore :

$Z^{2012} = -\,47027433278433465312576847920237854065554133077552955411564246500383386$
$06663148805556877255952409681585954671161292647520039399263695074637520614834858$
$61144736276435539199098882821239391191223793372884951300039658625496939095606738$
$72821053866175018586482686590223318552143720286463308451650012865319048266278571$
$58512003420389473463697732159852582288445457571951276303394018181453096398081710$
$54153250067278229485143728648281210300022956686758638598311483121262968506593107$
$08158329667239969569675931886696603822319094175960411662917399369526851696961078$
$32327185839259681703639892703864986099091503064243240 96\,\mathrm{i}$

$\boxed{\textbf{IV}}$ **a)** $z^2 = [\cos\theta + (\sin\theta)\,\mathrm{i}]^2 = \cos^2\theta + 2(\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{i} - \sin^2\theta$,
d'où $z^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2(\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{i}$.
Or, en appliquant les formules de trigonométrie fournies dans l'énoncé dans le cas particulier où $a = b = \theta$, on obtient :
$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin(2\theta) = \sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta$,
par conséquent $z^2 = \cos(2\theta) + [\sin(2\theta)]\,\mathrm{i}$.

b) Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathfrak{P}(n)$ la proposition $z^n = \cos(n\theta) + [\sin(n\theta)]\,\mathrm{i}$.

• $\mathfrak{P}(1)$ est vraie car $z^1 = z = \cos\theta + (\sin\theta)\,\mathrm{i} = \cos(1\times\theta) + [\sin(1\times\theta)]\,\mathrm{i}$.

• Supposons que $\mathfrak{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$; on a $z^n = \cos(n\theta) + [\sin(n\theta)]\,\mathrm{i}$,
donc $z^{n+1} = z \times z^n = [\cos\theta + (\sin\theta)\,\mathrm{i}]\,\{\cos(n\theta) + [\sin(n\theta)]\,\mathrm{i}\}$,
soit $z^{n+1} = \underbrace{\cos\theta\cos(n\theta) - \sin\theta\sin(n\theta)}_{\cos(\theta+n\theta)} + [\underbrace{\sin\theta\cos(n\theta) + \cos\theta\sin(n\theta)}_{\sin(\theta+n\theta)}]\,\mathrm{i}$.
Il suffit alors d'appliquer les formules de trigonométrie fournies dans l'énoncé en choisissant $a = \theta$ et $b = n\theta$, pour constater que : $z^{n+1} = \cos(\theta + n\theta) + [\sin(\theta + n\theta)]\,\mathrm{i}$,
soit $z^{n+1} = \cos[(n+1)\theta] + \{\sin[(n+1)\theta]\}\,\mathrm{i}$, ce qui prouve que $\mathfrak{P}(n+1)$ est vraie.

• Cela établit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z^n = \cos(n\theta) + [\sin(n\theta)]\,\mathrm{i}$.

c) Remarquons que $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$, donc $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^{2015} = \left[\cos\dfrac{\pi}{6} + \left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\,\mathrm{i}\right]^{2015}$,
d'où, d'après la question précédente (en prenant $n = 2015$ et $\theta = \dfrac{\pi}{6}$) :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^{2015} = \cos\frac{2015\pi}{6} + \left(\sin\frac{2015\pi}{6}\right)\,\mathrm{i}\ .$$

Or $\dfrac{2015\pi}{6} = \dfrac{2016\pi - \pi}{6} = -\dfrac{\pi}{6} + 336\pi = -\dfrac{\pi}{6} + 168 \times 2\pi$, donc $\cos\dfrac{2015\pi}{6} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
et $\sin\dfrac{2015\pi}{6} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$. Finalement, on obtient :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^{2015} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\ .$$