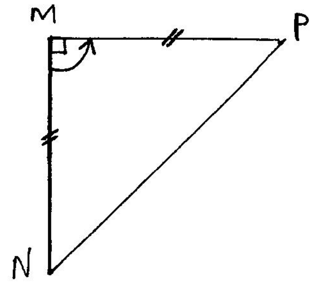
(A) 1). Comme MNP est direct rectangle en M, on a :



$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = \frac{\pi}{2}$, d'où $\arg \frac{p-m}{n-m} = \frac{\pi}{2}$

• D'autre part MNP est isocèle en M donc $MN = MP$

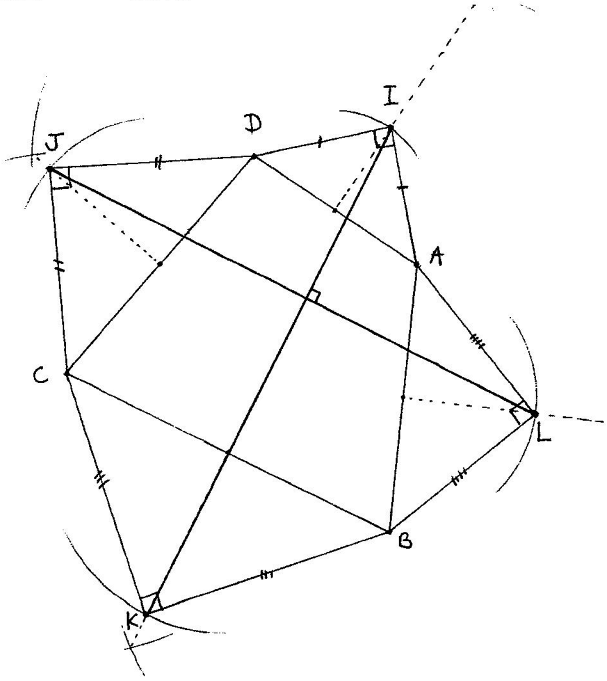
d'où $\left| \frac{p-m}{n-m} \right| = \frac{|p-m|}{|n-m|} = \frac{MP}{MN} = 1$

Ainsi, $\frac{p-m}{n-m}$ est de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$: $\frac{p-m}{n-m} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

2) Si $\frac{p-m}{n-m} = i$, on a : $(p-m) = i(n-m)$ d'où $m = \frac{p-in}{1-i} = \frac{(p-in)(1+i)}{2}$

soit : $m = \frac{1}{2}[p+n+i(p-n)]$

(B) 1)



2) D'après la question précédente,

$\alpha = \frac{1}{2}[a+d+i(a-d)]$

$\beta = \frac{1}{2}[d+c+i(d-c)]$

$\gamma = \frac{1}{2}[c+b+i(c-b)]$

et $\delta = \frac{1}{2}[b+a+i(b-a)]$

D'où $\gamma - \alpha = \frac{1}{2}[b+c-a-d+i(c+d-a-b)]$

et $\delta - \beta = \frac{1}{2}[b+a-d-c+i(b+c-a-d)] = \frac{i}{2}[b+c-a-d+i(c+d-a-b)]$

Ainsi, $\delta - \beta = i(\gamma - \alpha)$

En particulier $|\delta - \beta| = |i(\gamma - \alpha)| = |i| \cdot |\gamma - \alpha| = |\gamma - \alpha|$ d'où $JL = IK$

et $\operatorname{Arg}\left(\frac{\delta - \beta}{\gamma - \alpha}\right) = \operatorname{Arg} i = \frac{\pi}{2}$ d'où $(\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{JL}) = \frac{\pi}{2}$ ce qui prouve que les droites (JL) et (IK) sont orthogonales.