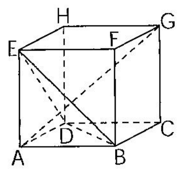
Exercice résolu :

Déterminer un vecteur normal à un plan

Méthode

Pour démontrer qu'un vecteur non nul est normal à un plan, on peut démontrer que ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.



ÉNONCÉ : ABCDEFGH est un cube.

Démontrer que $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE).

SOLUTION

• $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{EB}$. En effet, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$ car

$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EB} = \left(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG}\right) \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{EB}$.

Or $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$ et $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{FG} \cdot \left(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB}\right) = \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$.

• De même $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$ car

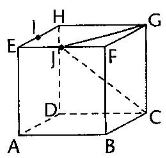
$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{ED} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HG}\right) \cdot \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{ED}$.

Or $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{ED} = 0$ et $\overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{HG} \cdot \left(\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HD}\right) = \overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{HD} = 0$.

$\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$ ne sont pas colinéaires ; $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan (BDE).*

→ Application :

ABCDEFGH est un cube.
I et J sont les milieux des arêtes [EH] et [EF].
Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{FI}$ est un vecteur normal au plan (CJG).



* On utilise la propriété suivante du cours :

<u>Proposition</u> : soit $\mathcal{P}$ un plan de base $(\vec{u}, \vec{v})$ et $\vec{n} \neq \vec{0}$.
Alors $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$.