Exercice (nombres complexes)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Soit z un nombre complexe. On rappelle que $\overline{z}$ est le conjugué de z et que $|z|$ est le module de z. On admet l'égalité : $|z|^2 = z\overline{z}$.

Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

Partie B : Étude d'une transformation particulière

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M′ d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{1-z}{\overline{z}-1}$.

1. Soit C le point d'affixe $z_{\mathrm{C}} = -2 + \mathrm{i}$.
   (a) Calculer l'affixe $z_{\mathrm{C}'}$ du point C′ image de C par la transformation f, et placer les points C et C′ dans le repère ci-dessous.
   (b) Montrer que le point C′ appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
   (c) Montrer que les points A, C et C′ sont alignés.
2. Déterminer et représenter sur la figure ci-dessous l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.
3. Montrer que, pour tout point M distinct de A, le point M′ appartient au cercle $\mathscr{C}$.
4. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.
   Que peut-on en déduire pour les points A, M et M′ ?
5. On a placé un point D sur la figure ci-dessous. Construire son image D′ par la transformation f.