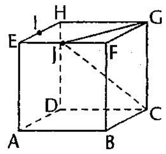
ABCDEFGH est un cube.
I et J sont les milieux des arêtes [EH] et [EF].
Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{FI}$ est un vecteur normal au plan (CJG).



CORRECTION

- On a $\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{JG} = (\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EI})\cdot(\overrightarrow{JF}+\overrightarrow{FG})$
$= \overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{JF} + \overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{JF} + \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{FG}$

Comme $(FE)\perp(FG)$ et $(EI)\perp(JF)$, on a $\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{JF} = 0$.

D'autre part comme J et I sont les milieux respectifs de [EF] et [EH],
on a $\overrightarrow{JF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$. On déduit que :
$\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{JG} = \overrightarrow{FE}\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}\right) + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{FG}\right)\cdot\overrightarrow{FG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}^2 = \frac{1}{2}(FG^2 - EF^2)$.

Or $FG = EF$ donc $\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{JG} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{FI}\perp\overrightarrow{JG}$.

- D'autre part $\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{CG} = (\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EI})\cdot\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{CG}$.

Or $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$ donc $\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{CG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{CG}$.

Comme $(GH)\perp(GC)$ et $(FG)\perp(CG)$, on obtient $\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{CG} = 0$

d'où $\overrightarrow{FI}\cdot\overrightarrow{CG} = 0 + \frac{1}{2}\times 0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{FI}\perp\overrightarrow{CG}$.

- $\overrightarrow{FI}$ est donc orthogonal à deux vecteurs ($\overrightarrow{JG}$ et $\overrightarrow{CG}$) non colinéaires dont la direction est parallèle au plan (CJG), ce qui prouve que $\overrightarrow{FI}$ est normal au plan (CJG).