Terminale S

Démonstrations « exigibles »

I Suites

Propriété : Soit (u_n) une suite divergeant vers $+\infty$ et (v_n) une suite telle que $v_n \geqslant u_n$ pour n assez grand. Alors (v_n) diverge également vers $+\infty$.

Démonstration : Par hypothèse, il existe un entier naturel N tel que $v_n \geqslant u_n$ dès que $n \geqslant N$.
Soit M un réel quelconque. Comme (u_n) diverge vers $+\infty$, il existe un entier naturel N' tel que $u_n \in]M; +\infty[$ dès que $n \geqslant N'$.
Posons $N'' = \max(N, N')$. Si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $n \geqslant N''$, on a alors $v_n \geqslant u_n$ et $u_n > M$, ce qui permet de déduire par transitivité que $v_n > M$.
Bilan : pour tout réel M, il existe un entier N'' tel que $v_n \in]M; +\infty[$ dès que $n \geqslant N''$. Cela prouve bien la divergence vers $+\infty$ de la suite (v_n).

Propriété : Soit (u_n) une suite croissante convergeant vers un réel ℓ, alors pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant \ell$.

Démonstration : Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un entier N tel que $u_N > \ell$.
Posons $\varepsilon = u_N - \ell$; on a $\varepsilon > 0$ donc comme (u_n) converge vers ℓ, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$ dès que $n \geqslant N'$.
Notons $N'' = \max(N, N')$. On a en particulier $N'' \geqslant N'$ donc $u_{N''} < \ell + \varepsilon = u_N$. Cela contredit la croissance de (u_n) car comme $N'' \geqslant N$, on devrait avoir $u_{N''} \geqslant u_N$.

Propriété : Une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

Démonstration : Considérons un suite (u_n) croissante et non majorée.
Soit M un réel quelconque. La suite (u_n) n'est pas majorée par M donc il existe un entier N tel que $u_N > M$. Comme (u_n) est croissante, si n est un entier naturel tel que $n \geqslant N$, on a $u_n \geqslant u_N$ et comme $u_N > M$, on obtient (par transitivité) $u_n > M$.
Bilan : pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in]M; +\infty[$ dès que $n \geqslant N$. Cela établit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Propriété : Si q est un réel appartenant à $]1;+\infty[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Démonstration : • Montrons tout d'abord par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition :

$$\mathfrak{P}(n) : \quad \text{pour tout réel } a > 0, \text{ on a } (1+a)^n \geqslant 1 + na$$

− Si $a > 0$, on a $(1+a)^0 = 1 = 1 + 0 \times a$, donc $\mathfrak{P}(0)$ est vraie.

− Supposons que $\mathfrak{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.
Soit $a > 0$; on a $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ donc $(1+a) \times (1+a)^n \geqslant (1+a) \times (1+na)$ (vu que $1 + a > 0$) donc $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+na+a+na^2 = 1+(n+1)a+na^2$. Or $na^2 \geqslant 0$ donc $1+(n+1)a+na^2 \geqslant a+(n+1)a$ et finalement par transitivité : $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$, ce qui prouve que $\mathfrak{P}(n+1)$ est vraie.

− On a donc établi par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a > 0$, on a $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

• Comme $q > 1$, on a $a = q - 1 > 0$. On déduit du point précédent que pout tout $n \in \mathbb{N}$, on a $q^n \geqslant 1 + n \times (q-1)$. Or comme $q - 1 > 0$, on a par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} [1 + n \times (q-1)] = +\infty$. Cela entraîne par comparaison que la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.

$\boxed{\text{II}}$ Fonction exponentielle

Propriété : admettons l'existence (d'au moins) une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1$ et pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$. Alors f est unique.

Démonstration : Soit g une fonction dérivable vérifiant $g(0) = 1$ et pour tout réel x, $g'(x) = g(x)$. Montrons que $g = f$.

• Prouvons tout d'abord que f ne s'annule pas.
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \underbrace{f(x)}_{u}\underbrace{f(-x)}_{v}$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et pour tout réel x, $h'(x) = \underbrace{f'(x)}_{u'} \times \underbrace{f(-x)}_{v} + \underbrace{f(x)}_{u} \times \underbrace{[-f'(-x)]}_{v'}$. Comme $f = f'$, on obtient $h'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$, ce qui prouve que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$, égale à $h(0) = f(0)f(-0) = f(0)^2 = 1^2 = 1$. Ainsi, pour tout réel x, $f(x)f(-x) = 1$, ce qui montre en particulier que $f(x) \neq 0$.

• Comme f ne s'annule pas, on peut définir sur $\mathbb{R}$ la fonction $k = \dfrac{g}{f}$. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient et pour tout réel x, $k'(x) = \dfrac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2}$. Comme $f' = f$ et $g' = g$, on obtient $k'(x) = \dfrac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{f(x)^2} = 0$. La fonction k est donc constante sur $\mathbb{R}$, égale à $k(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$. Finalement on déduit que pour tout réel x, on a $\dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$, soit $f(x) = g(x)$.

Propriété : On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

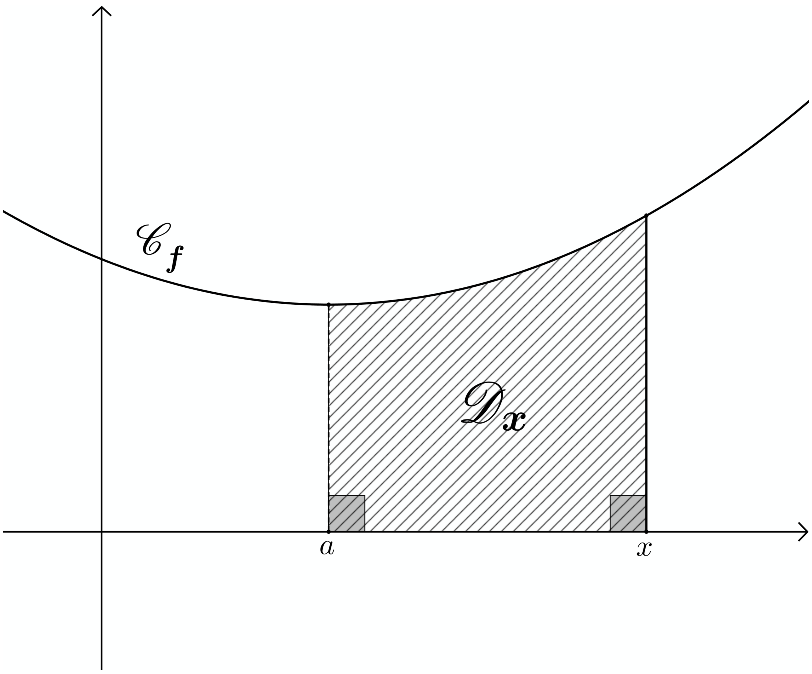
Démonstration : • Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme et pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$. Or par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, si $x \geqslant 0$, alors $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0 = 1$ et donc $f'(x) \geqslant 0$. Ainsi f est une fonction croissante sur $[0; +\infty[$, ce qui entraîne que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant f(0)$, soit $\mathrm{e}^x - x \geqslant \mathrm{e}^0 - 0$, ou encore $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty$, on déduit par comparaison que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

• On a $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$. Or le premier point permet de déduire par quotient que $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^X} = 0$. Par composition, on obtient donc finalement $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.

$\boxed{\text{III}}$ Intégration

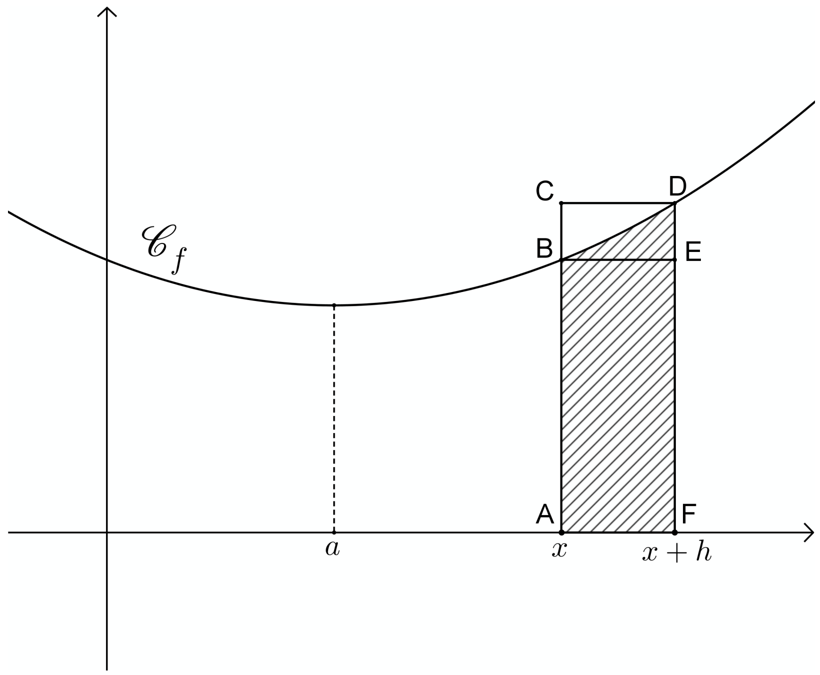
Remarque : le théorème qui suit a été démontré en classe dans le cas où $f(x) = x^2$ et $\mathrm{I} = [0; +\infty[$.

Théorème : On se place dans un repère orthogonal. Soit f une fonction continue, positive et croissante sur un intervalle $\mathrm{I} = [a; b]$ $(a < b)$ ou bien $\mathrm{I} = [a; +\infty[$. Si $x \in \mathrm{I}$, soit $\mathscr{D}_x$ le domaine du plan (hachuré ci-dessous) sous le graphe de f « entre a et x ». Notons $\mathscr{A}(x)$ l'aire du domaine $\mathscr{D}_x$ en unités d'aire. Alors la fonction $\mathscr{A}$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.



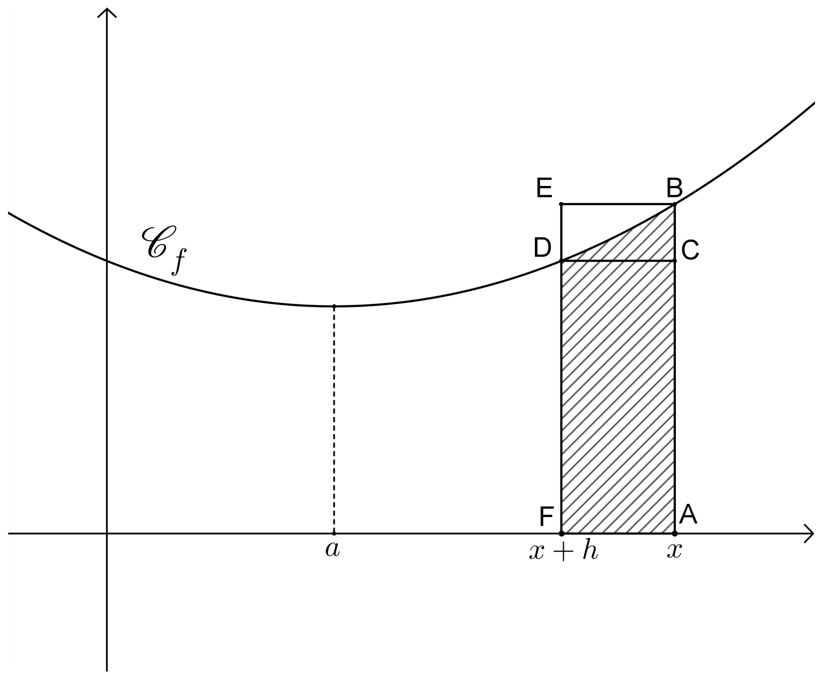
Démonstration : Il est déjà clair que la fonction $\mathscr{A}$ s'annule en a.
Fixons le réel x dans I ; il faut montrer que $\mathscr{A}$ est dérivable en x et que $\mathscr{A}'(x) = f(x)$. Considérons un réel h tel que $x + h \in \mathrm{I}$ et notons $\mathrm{A}(x; 0)$, $\mathrm{B}(x; f(x))$, $\mathrm{C}(x; f(x+h))$, $\mathrm{D}(x+h; f(x+h))$, $\mathrm{E}(x+h; f(x))$ et $\mathrm{F}(x+h; 0)$.

• Supposons $h > 0$.



Vu la croissance de f, le domaine $\mathscr{D}_{x+h} \backslash \mathscr{D}_x$ (hachuré ci-dessus) est contenu dans le rectangle ACDF et contient le rectangle ABEF. Par conséquent :
Aire(ABEF) $\leqslant$ Aire $(\mathscr{D}_{x+h} \backslash \mathscr{D}_x) \leqslant$ Aire(ACDF), soit $h\, f(x) \leqslant \mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x) \leqslant h\, f(x+h)$, et comme $h > 0$: $f(x) \leqslant \dfrac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h} \leqslant f(x+h)$.
Comme f est continue, on a $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h}$ existe et vaut $f(x)$.

• Supposons $h < 0$.



Vu la croissance de f, le domaine $\mathscr{D}_x \backslash \mathscr{D}_{x+h}$ (hachuré ci-dessus) est contenu dans le rectangle ABEF et contient le rectangle ACDF. Par conséquent :
Aire(ACDF) $\leqslant$ Aire $(\mathscr{D}_x \backslash \mathscr{D}_{x+h}) \leqslant$ Aire(ABEF). Notons que comme $h < 0$, on a AF $= -h$, donc : $-h\, f(x+h) \leqslant \mathscr{A}(x) - \mathscr{A}(x+h) \leqslant -h\, f(x)$, d'où : $f(x+h) \leqslant \dfrac{\mathscr{A}(x) - \mathscr{A}(x+h)}{-h} \leqslant f(x)$ (car

$h < 0$), ou encore $f(x+h) \leqslant \dfrac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h} \leqslant f(x)$.
Comme f est continue, on a $\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h}$ existe et vaut $f(x)$.

• On a donc prouvé que les limites $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h}$ et $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h}$ existent et sont toutes les deux égales à $f(x)$. Cela entraîne que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\mathscr{A}(x+h) - \mathscr{A}(x)}{h}$ existe et vaut $f(x)$: la fonction $\mathscr{A}$ est donc dérivable en x et $\mathscr{A}'(x) = f(x)$.

IV Géométrie dans l'espace

Théorème du toit : Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans sécants de droite d'intersection Δ. Si d et d' sont deux droites parallèles et respectivement incluses dans $\mathscr{P}$ et dans $\mathscr{P}'$, alors d et d' sont parallèles à Δ.

Démonstration : Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de d (et donc de d') et $\overrightarrow{v}$ un vecteur directeur de Δ. Raisonnons par l'absurde en supposant que d et Δ ne soient pas parallèles ; les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont donc pas colinéaires. Or, d'une part $d \subset \mathscr{P}$, $d' \subset \mathscr{P}'$ et $\overrightarrow{u}$ dirige d et d', donc $\overrightarrow{u}$ est un vecteur des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. Et d'autre part $\Delta \subset \mathscr{P}$, $\Delta \subset \mathscr{P}'$ et $\overrightarrow{v}$ dirige Δ donc $\overrightarrow{v}$ est aussi un vecteur des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. On en déduit que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est à la fois une base$^{(\star)}$ du plan $\mathscr{P}$ et du plan $\mathscr{P}'$, ce qui prouve que $\mathscr{P} // \mathscr{P}'$: contraire à l'hypothèse.

$^{(\star)}$ Rappel : une base d'un plan est un couple de vecteurs du plan non colinéaires.

Rappel : une droite de l'espace est dite orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toute droite incluse dans ce plan.

Proposition : La droite Δ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$ si et seulement Δ est orthogonale à deux droites sécantes d et d' incluses dans $\mathscr{P}$.

Démonstration : • Si la droite Δ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$, alors elle est (par définition) orthogonale à toute droite incluse dans $\mathscr{P}$. On a donc en particulier $\Delta \perp d$ et $\Delta \perp d'$.
• Réciproquement, supposons que $\Delta \perp d$ et $\Delta \perp d'$. Montrons que Δ est orthogonale à une droite quelconque d'' incluse dans $\mathscr{P}$.
Notons $\overrightarrow{u}$ (resp. $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{n}$) un vecteur directeur de d (resp. d', d'', Δ).
Comme d et d' sont sécantes, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires ; ils forment donc une base du plan $\mathscr{P}$. Comme $d'' \subset \mathscr{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont coplanaires : il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$. On a alors $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{n} \cdot (\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) = \alpha\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v}$.
Or $\Delta \perp d$ et $\Delta \perp d'$ donc $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0$. On en déduit que $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{w} = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0$, ce qui prouve que $\Delta \perp d''$.

Propriété : Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par le point A et possédant $\overrightarrow{n}$ comme vecteur normal. Si M est un point de l'espace, alors : $\mathrm{M} \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{n} = 0$

Démonstration :
• Si $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$, $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ est un vecteur du plan $\mathscr{P}$ donc $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, d'où $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.
• Réciproquement supposons que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{n} = 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathrm{M} \notin \mathscr{P}$.
Soit $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ une base du plan $\mathscr{P}$. Comme $\mathrm{M} \notin \mathscr{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas coplanaires.
Il existe donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\overrightarrow{n} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \beta\overrightarrow{u} + \gamma\overrightarrow{v}$, alors $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{n} + \beta\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} + \gamma\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}$ et comme $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0$, $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 0$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{n} = 0$, on obtient $||\overrightarrow{n}||^2 = \overrightarrow{n}^2 = 0$, soit $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{0}$, ce qui contredit le fait que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

Conséquence : On se place dans un repère orthonormal. Un plan $\mathscr{P}$ de l'espace possède une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Démonstration : Soit $\mathrm{A}(x_0; y_0; z_0)$ un point de $\mathscr{P}$ et $\overrightarrow{n}(a; b; c)$ un vecteur normal de $\mathscr{P}$.
Soit $\mathrm{M}(x; y; z)$ un point de l'espace. On a $\overrightarrow{\mathrm{AM}}(x - x_0; y - y_0; z - z_0)$.
D'après la propriété précédente, on a : $\mathrm{M} \in \mathscr{P} \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{n} = 0$
$\iff (x - x_0) \times a + (y - y_0) \times b + (z - z_0) \times c = 0$
$\iff ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$
$\iff ax + by + cz + d = 0$ en posant $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

$\boxed{\text{V}}$ Probabilités

Propriété : Si A et B sont deux événements indépendants, alors il en est de même des événements $\overline{A}$ et B.

Démonstration : A et B sont deux événements indépendants donc $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.
D'après la formule des probabilités totales, on a $p(B) = p(A \cap B) + p\left(\overline{A} \cap B\right)$, d'où :
$p\left(\overline{A} \cap B\right) = p(B) - p(A \cap B) = p(B) - p(A)p(B) = [1 - p(A)]p(B)$, ou encore $p\left(\overline{A} \cap B\right) = p\left(\overline{A}\right)p(B)$, ce qui prouve que les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Propriété : Une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre λ est *sans mémoire* (on dit aussi *sans vieillissement*), c'est-à-dire que pour tous réels positifs s et h, on a :

$$p_{(X \geqslant s)}(X \geqslant s + h) = p(X \geqslant h).$$

Démonstration : Si A et B sont deux événements (avec $p(B) \neq 0$), on a $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Par conséquent : $p_{(X \geqslant s)}(X \geqslant s+h) = \dfrac{p\left[(X \geqslant s) \cap (X \geqslant s+h)\right]}{p(X \geqslant s)}$.

Or comme $h \geqslant 0$, on a $(X \geqslant s) \cap (X \geqslant s+h) = (X \geqslant s+h)$, d'où :

$p_{(X \geqslant s)}(X \geqslant s+h) = \dfrac{p(X \geqslant s+h)}{p(X \geqslant s)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda s}} = \mathrm{e}^{-\lambda(s+h)+\lambda s} = \mathrm{e}^{-\lambda h} = p(X \geqslant h)$.

Définition : L'espérance d'une variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$, est :

$E(X) = \lim\limits_{u \to -\infty} \displaystyle\int_u^0 x f(x)\,\mathrm{d}x + \lim\limits_{v \to +\infty} \int_0^v x f(x)\,\mathrm{d}x$ (où f est la densité $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$) .

Propriété (espérance) : Si la variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$, alors $E(X) = 0$.

Démonstration : Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} x \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ donc $\displaystyle\int_u^0 x f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_u^0 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2}$.

Or $\lim\limits_{u \to -\infty}\left(-\frac{1}{2}u^2\right) = -\infty$ et par produit et somme $\lim\limits_{w \to -\infty}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^w\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \times 0 = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, donc par composition $\lim\limits_{u \to -\infty} \displaystyle\int_u^0 x f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

D'autre part, $\displaystyle\int_0^v x f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_0^v = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}v^2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Or $\lim\limits_{v \to +\infty}\left(-\frac{1}{2}v^2\right) = -\infty$ et par produit et somme $\lim\limits_{w \to -\infty}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^w + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \times 0 + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, donc par composition $\lim\limits_{v \to +\infty} \displaystyle\int_0^v x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

On en déduit que $E(X) = -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0$.

Propriété : Si X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0;1)$, alors pour tout réel α dans $]0;1[$, il existe un unique réel strictement positif, noté u_α, tel que $p\left(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha\right) = 1 - \alpha$.

Démonstration : Notons $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ la fonction de densité associée à la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ et pour $u \geqslant 0$, $G(u) = p(-u \leqslant X \leqslant u) = \displaystyle\int_{-u}^{u} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On a $G(u) = 2 \times p(0 \leqslant X \leqslant u) = 2\displaystyle\int_0^u f(x)\,\mathrm{d}x$, donc G est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$, $G'(u) = 2f(u) > 0$. D'autre part $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} G(u) = \lim_{u\to+\infty}\int_{-u}^{u} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. On en déduit que :

u	$0 \qquad\qquad +\infty$
$G'(u)$	$+$
G	$0 \nearrow 1$

G est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0; +\infty[$; $G(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} G(u) = 1$. Comme $1-\alpha \in]0;1[$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires entraîne l'existence d'un unique réel u_α dans $]0;+\infty[$ tel que $G(u_\alpha) = 1-\alpha$, c'est-à-dire tel que $p\left(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha\right) = 1-\alpha$.

Théorème : Soit $p \in]0;1[$ et pour tout $n \geqslant 2$, X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Soit $\mathrm{I}_n = \left[p - u_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$, où u_α est l'unique réel strictement positif tel que $p\left(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha\right) = 1-\alpha$ lorsque Z suit la loi normale $\mathscr{N}(0;1)$.

$$\text{Alors} \quad : \quad \lim_{n\to+\infty} p\left(\frac{X_n}{n} \in \mathrm{I}_n\right) = 1-\alpha.$$

Démonstration : $\dfrac{X_n}{n} \in \mathrm{I}_n \iff p - u_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{X_n}{n} \leqslant p + u_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$

$\iff np - u_\alpha n\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant X_n \leqslant np + u_\alpha n\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$ (car $n > 0$)

$\iff np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n \leqslant np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)}$

$\iff -u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leqslant X_n - np \leqslant u_\alpha\sqrt{np(1-p)}$

$\iff -u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha$, où $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ est la variable centrée-réduite de X_n.

On a donc $p\left(\dfrac{X_n}{n} \in \mathrm{I}_n\right) = p(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha)$.

Or d'après le théorème de Moivre-Laplace, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p(-u_\alpha \leqslant Z_n \leqslant u_\alpha) = p(-u_\alpha \leqslant Z \leqslant u_\alpha)$, où Z est une variable suivant la loi normale $\mathscr{N}(0;1)$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p\left(\frac{X_n}{n} \in \mathrm{I}_n\right) = 1-\alpha$.

Remarque : pour la propriété qui suit, le programme stipule simplement qu' « il est intéressant de la démontrer ». Peut-être la démonstration n'est-elle pas strictement exigible...

Propriété : Soit $p \in]0;1[$, fixé et pour tout $n \geqslant 2$, X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Notons $F_n = \dfrac{X_n}{n}$; alors pour n assez grand, on a : $p\left(p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant F_n \leqslant p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95$.

Démonstration : La calculatrice fournit : $u_{0,049} \approx 1,97$. Par conséquent $u_{0,049} \leqslant 2$.
Notons $\mathrm{I}_n = \left[p - u_{0,049}\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_{0,049}\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$. D'après le théorème précédent, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} p\,(F_n \in \mathrm{I}_n) = 1 - 0,049 = 0,951$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier N tel que $p(F_n \in \mathrm{I}_n) \in]0,951 - \varepsilon ; 0,951 + \varepsilon[$, dès que $n \geqslant N$. En choisissant $\varepsilon = 0,001$, on voit donc qu'il existe un entier N_0 tel que $p(F_n \in \mathrm{I}_n) \geqslant 0,951 - 0,001 = 0,95$, dès que $n \geqslant N_0$.
D'autre part, une étude de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0;1]$ prouve qu'elle possède un maximum égal à $\frac{1}{4}$, atteint en $x = \frac{1}{2}$. On en déduit par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$ que $\sqrt{p(1-p)} \leqslant \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ et donc que $0 < u_{0,049}\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant 2 \times \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. On en déduit que $\mathrm{I}_n \subset \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et donc que $p\left(F_n \in \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant p(F_n \in \mathrm{I}_n) \geqslant 0,95$, dès que $n \geqslant N_0$.