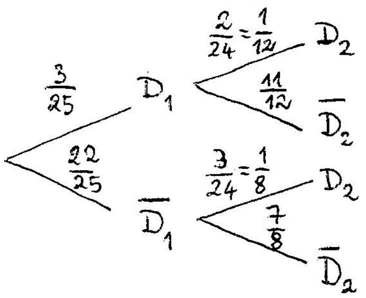
TS - Amérique du Nord, mai 2011, exercice 2 : CORRECTION

Partie A

Il s'agit d'une situation de tirage sans remise ; celle-ci peut être modélisée par l'arbre pondéré :



D_1 = « le premier ordinateur choisi est défectueux »

D_2 = « le second ordinateur choisi est défectueux »

La probabilité cherchée est $p(D_1 \cap D_2) = \frac{3}{25} \times \frac{1}{12} = 0{,}01$

Partie B

1) On a $p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -e^{-\lambda t} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda t}$.

Donc $p(X>5) = 1 - p(X \leqslant 5) = 1 - (1 - e^{-5\lambda}) = e^{-5\lambda}$. On en déduit que $e^{-5\lambda} = 0{,}4$, d'où $-5\lambda = \ln 0{,}4$, soit $\lambda = -\frac{1}{5}\ln 0{,}4 \approx 0{,}183$

2) La probabilité cherchée est $p_{(X>3)}(X>5) = \dfrac{p[(X>3)\cap(X>5)]}{p(X>3)} = \dfrac{p(X>5)}{p(X>3)}$

Or si $t \geqslant 0$, $p(X>t) = 1 - p(X \leqslant t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$ donc

$p_{(X>3)}(X>5) = \dfrac{e^{-5\lambda}}{e^{-3\lambda}} = e^{-2\lambda} = e^{-0{,}36} \approx 0{,}698$

3) a) On peut modéliser la situation par un schéma de Bernoulli obtenu en répétant 10 fois de manière indépendante l'épreuve élémentaire : « choisir un ordinateur » avec pour succès S = « l'ordinateur a une durée de vie supérieure à 5 ans » et $p = p(S) = 0{,}4$. Si X désigne le nombre de succès (c'est-à-dire ici le nombre d'ordinateurs dont la durée de vie dépasse 5 ans dans le lot de 10), alors X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;0{,}4)$.

La probabilité cherchée est $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \binom{10}{0} 0{,}4^0 \times 0{,}6^{10} = 1 - 0{,}6^{10} \approx 0{,}994$

3) b) Le raisonnement est identique à celui fait précédemment en remplaçant 10 par un n quelconque : $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \binom{n}{0} 0{,}4^0 \times 0{,}6^n = 1 - 0{,}6^n$.

Il s'agit alors de résoudre l'inéquation : $1 - 0{,}6^n \geqslant 0{,}999$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}6^n \leqslant 0{,}001 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(0{,}6^n) \leqslant \ln(0{,}001)$ par stricte croissance de la fonction ln sur $]0;+\infty[$, ce qui équivaut à :

$n \ln 0{,}6 \leqslant \ln(0{,}001) \quad \Leftrightarrow \quad n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}6)}$ (attention $\ln(0{,}6) < 0$ car $0{,}6 \in]0;1[$)

Or $\dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln 0{,}6} \approx 13{,}5$; il faut donc au minimum 14 ordinateurs.