TS – Bac blanc, mai 2016 : correction de la question 4.a. de l'exercice 1.

• On a $z_{n+1} - z_n = \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right) z_n - z_n = \left(-\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right) z_n$,

d'où $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \dfrac{\left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right) z_n}{\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{i}\right) z_n} = \dfrac{-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}}{3 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}}$,

soit $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \dfrac{\mathrm{i}\,(\mathrm{i} + \sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + \mathrm{i})} = \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{i}$.

• On a $\left(\overrightarrow{OA_{n+1}}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) = \arg\left(\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - 0}\right) = \arg\left(\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}\right)$,

d'où $\left(\overrightarrow{OA_{n+1}}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) = \arg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{i}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

On en déduit que les droites (OA_{n+1}) et (A_nA_{n+1}) sont orthogonales et donc que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.