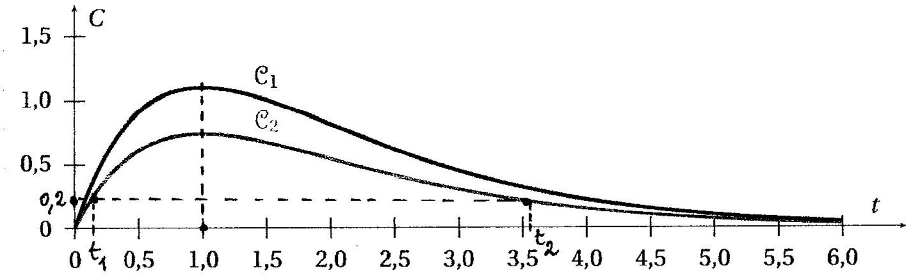
Bac S, Polynésie, 10 juin 2016 - CORRIGÉ

Exercice 1



Remarque : $\mathcal{C}_2$ est en fait le graphe de la fonction f étudiée dans la partie B.

- A)1) $C'(t)$ est la pente de la tangente au point d'abscisse t au graphe de f. Cette pente semble maximale lorsque $t=0$ (instant initial). La vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang est maximale au moment où l'individu ingère l'alcool.

- A)2) À chaque instant t entre 0 et 1 (moment où la concentration d'alcool semble maximale), la pente de la tangente à $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse t semble supérieure à la pente de la tangente à $\mathcal{C}_2$ au même moment. La personne P_1 subit donc plus vite les effets de l'alcool que la personne P_2. La personne P_1 est donc sans doute moins corpulente que la personne P_2.

- A)3)a) $f : t \mapsto \underbrace{At}_{u}\underbrace{e^{-t}}_{v}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$, par produit et composition et pour tout $x \in [0;+\infty[$, $f'(t) = \underbrace{Ae^{-t}}_{u'v} + \underbrace{At(-e^{-t})}_{uv'} = A(1-t)e^{-t}$. D'où $f'(0) = A(1-0)e^{-0} = A$.

- A)3)b) D'après la question précédente, A est la vitesse d'apparition de l'alcool à l'instant initial. Donc plus A est grand, moins la personne est corpulente : l'affirmation de l'énoncé est donc fausse.

- B)1) Remarque préliminaire : je préfère nettement le whisky au rhum, par exemple un single malt écossais au goût délicatement tourbé. Ceci dit, d'après A-3-a., la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ de dérivée $f' : t \to 2(1-t)e^{-t}$. Comme $2>0$ et $e^{-t}>0$, $f'(t)$ est du signe de $1-t$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(t)>0 \text{ si } t\in[0,1[\\ f'(1)=0 \\ f'(t)<0 \text{ si } t\in]1,+\infty[\end{array}\right\}$$

f est donc strictement croissante sur $[0;1]$ et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$

- B)2) D'après la question précédente, f possède un maximum en 1 égal à $f(1) = 2\times1\times e^{-1}$; La concentration d'alcool dans le sang de Paul est donc maximale au bout d'1 heure et vaut $\frac{2}{e} \approx 0{,}74$ g/l.

- B)3) On a $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$. Donc par quotient $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0^+$, soit $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t} = 0^+$ et on déduit par produit que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0^+$. Dans le contexte de l'exercice, cela traduit le fait qu'au bout d'un temps très grand, la concentration d'alcool dans le sang est proche de zéro.

• B) 4) a)

t	0	t_1	1	t_2	$+\infty$
f	0	$\nearrow 0{,}2 \nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow 0{,}2 \searrow$	0^+

} Grâce aux résultats obtenus dans les questions précédentes.

- La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0;1[$, $f(0)=0$ et $f(1)=\frac{2}{e}\simeq 0{,}74$. Comme $0{,}2\in[0,\frac{2}{e}[$, le corollaire du Théorème des valeurs intermédiaires prouve que l'équation $f(t)=0{,}2$ possède une unique solution $t_1\in[0;1[$.
- La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$, $f(1)=\frac{2}{e}\simeq 0{,}74$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$. Comme $0{,}2\in]0;\frac{2}{e}]$, le corollaire du T.V.I prouve que l'équation $f(t)=0{,}2$ possède une unique solution $t_2\in[1;+\infty[$.
- Bilan : l'équation $f(t)=0{,}2$ possède exactement deux solutions (t_1 et t_2) dans $[0;+\infty[$.

• B) 4) b) En utilisant la méthode "par balayage", la calculatrice fournit l'encadrement : $3{,}577 < t_2 < 3{,}578$. Or $3{,}577\text{ h} = 3\text{h} + 0{,}577\times 60\text{ min} = 3\text{h} + 34{,}62\text{ min}$,

et $3{,}578\text{ h} = 3\text{h} + 0{,}578\times 60\text{ min} = 3\text{h} + 34{,}68\text{ min}$.

Donc Paul pourra reprendre le volant en toute légalité au bout de $3^{\text{h}}35^{\text{min}}$.

• B) 5) a) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$, $f(1)=\frac{2}{e}\simeq 0{,}74$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$. Comme $5\times 10^{-3}\in]0;\frac{2}{e}]$, le corollaire du T.V.I. assure qu'il existe un unique réel $T\in[1;+\infty[$ tel que $f(T)=5\times10^{-3}$. Comme f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$, on a $f(t)<5\times10^{-3}$ pour tout $t>T$: la concentration d'alcool n'est plus détectable à partir de l'instant T.

• B) 5) b)

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25	0,25	0,25
t	3,5	3,75	4
C	0,21	0,18	0,15

La valeur affichée par l'algorithme correspond à la durée t au bout de laquelle la concentration d'alcool n'est plus détectable dans le sang (valeur arrondie au quart d'heure supérieur). À titre d'information l'algorithme fournit $t = 8{,}25\text{ h} = 8^{\text{h}}15^{\text{min}}$.

Exercice 2

1) C2 : $\boxed{= B2 + 2*A2\text{^}2 + 3*A2 + 5}$ ← correspond à la relation $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$

B3 : $\boxed{= 2*B2 + 2*A2\text{^}2 - A2}$ ← correspond à la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.

2)

A	B	C	
n	u	v	
0	2	7	×2
1	4	14	×2
2	9	28	×2
3	24	56	
4	63		

D'après le tableau fourni par l'énoncé, il semble que (v_n) soit une suite géométrique de raison 2. Démontrons le :

Si $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}=u_{n+1}+2(n+1)^2+3(n+1)+5$

$\Rightarrow v_{n+1}=2u_n+2n^2-n+2n^2+4n+2+3n+3+5$

$\Rightarrow v_{n+1}=2u_n+4n^2+6n+10 = 2\underbrace{(u_n+2n^2+3n+5)}_{v_n}$

$\Rightarrow v_{n+1}=2v_n$

(v_n) est donc bien une suite géométrique raison 2 ; son terme initial est $v_0=u_0+2\times0^2+3\times0+5=2+5=7$. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=v_0\times2^n=7\times2^n$.

On en déduit que $u_n+2n^2+3n+5=7\times2^n$, d'où $u_n=7\times2^n-2n^2-3n-5$.

Exercice 3 A)1) T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0{,}2$.

RAPPEL : lorsqu'une variable T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$, alors pour tous réels a et b tels que $0\leq a\leq b$, on a $p(a\leq T\leq b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$.
On a en particulier $p(T\geq b)=1-p(0\leq T\leq b)=1-(1-e^{-\lambda b})=e^{-\lambda b}$,
et $p(T\leq b)=p(0\leq T\leq b)=e^{-\lambda\times0}-e^{-\lambda b}=1-e^{-\lambda b}$.

On a $p(T\leq3)=1-e^{-0,2\times3}=1-e^{-0,6}\approx0{,}451$.

A)2) En notant t_0 cette durée minimale, on a $p(T\leq t_0)=0{,}95$, d'où $1-e^{-0,2t_0}=0{,}95$
$\Leftrightarrow e^{-0,2t_0}=0{,}05 \Leftrightarrow -0{,}2t_0=\ln0{,}05 \Leftrightarrow t_0=-\dfrac{\ln0{,}05}{0{,}2}\approx15$. Cela signifie qu'en attendant un quart d'heure, on a 95% de chances d'observer une deuxième étoile filante (à condition aussi de ne pas avoir bu plus de deux verres de rhum).

A)3) L'espérance de T est $E(T)=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{0{,}2}=5$. Cela signifie que le temps d'attente moyen entre deux étoiles filantes est de 5 min. Le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes peut être estimé à $\dfrac{120}{5}=24$ ($2^h=120^{min}$) lors de cette sortie.

B) 1) Notons N l'événement "La personne est un nouvel adhérent"
et T l'événement "La personne possède un télescope".

D'après la formule des probabilités totales : $p(T)=p(N\cap T)+p(\bar N\cap T)$, d'où
$p(T)=p(N)\times p_N(T)+0{,}27=0{,}64\times0{,}35+0{,}27=0{,}494$.

B)2) Il s'agit de calculer $p_T(N)=\dfrac{p(N\cap T)}{p(T)}=\dfrac{p(N)\times p_N(T)}{p(T)}=\dfrac{0{,}64\times0{,}35}{0{,}494}\approx0{,}453$.

c) Sous l'hypothèse H = "50% de la population est favorable à la coupure de l'éclairage nocturne", l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence du caractère "être favorable à la coupure" dans un échantillon de taille 100 de la population de la ville est $I\approx\left[0{,}5-1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}5\times0{,}5}}{\sqrt{100}} ; 0{,}5+1{,}96\dfrac{\sqrt{0{,}5\times0{,}5}}{\sqrt{100}}\right]=[0{,}402 ; 0{,}598]$.

Le sondage effectué par l'astronome donne $f_{obs}=\dfrac{54}{100}=0{,}54$. Comme $f_{obs}\in I$, l'astronome peut ne pas changer d'avis (hypothèse H non rejetée au seuil de 95%).

Exercice 4 1) On a $\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \dfrac{\sqrt{2} + 3i + 4i}{1 + i + 4i} = \dfrac{\sqrt{2} + 7i}{1 + 5i} = \dfrac{(\sqrt{2} + 7i)(1 - 5i)}{(1 + 5i)(1 - 5i)}$,

d'où $\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \dfrac{\sqrt{2} - 5\sqrt{2}\, i + 7i + 35}{1 + 25} = \dfrac{\sqrt{2} + 35}{26} + \dfrac{7 - 5\sqrt{2}}{26} i$. Comme $5\sqrt{2} \neq 7$, on a

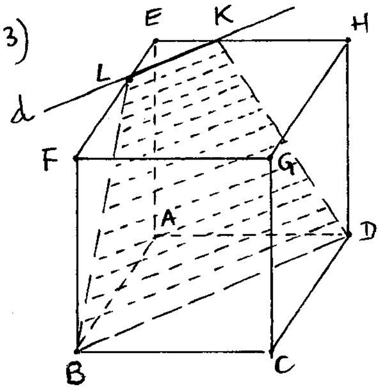
$\dfrac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \notin \mathbb{R}$, donc A, B et C ne sont pas alignés → La proposition 1 est vraie.

2) Si $n \in \mathbb{N}^*$, $[i(1+i)]^{2n} = \{[i(1+i)]^2\}^n = [i^2(1+i)^2]^n = (-(1 + 2i - 1))^n = (-2i)^n$.

En particulier $[i(1+i)]^8 = (-2i)^4 = (-2)^4 (i^2)^2 = 16 \times (-1)^2 = 16 \in \mathbb{R}_+^*$.

→ La proposition 2 est fausse ($n = 4$ constitue un contrexemple).

3)



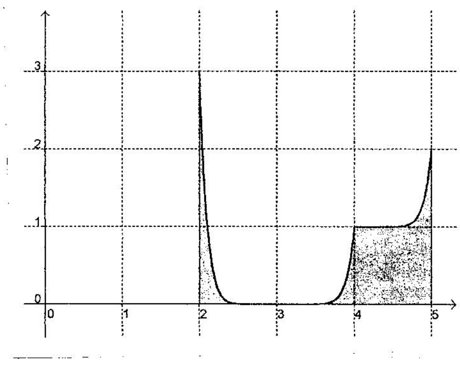
• La proposition 3 est fausse : la section du cube par le plan (BDL) est en fait un trapèze (voir figure ci-contre). Rapidement : comme $(BDL) \cap (ABD) = (BD)$ et $(ABD) \parallel (EFH)$, les plans (BDL) et (EFH) sont sécants et ont pour intersection une droite d parallèle à (BD). Comme $L \in (EF) \subset (EFH)$ et $L \in (BDL)$, on a $L \in d$, par conséquent d est la parallèle à (BD) passant par L. Les droites d et (EH) n'étant pas parallèles et coplanaires (incluses dans (EFH)), elles sont sécantes en un point K. On a $K \in (EH) \subset (AEH)$ et $K \in d \subset (BDL)$; comme $D \in (BDL) \cap (AEH)$, on en déduit que $(BDL) \cap (AEH) = (KD)$. La section cherchée est finalement le trapèze BDKL.

• La proposition 4 est fausse : on peut par exemple se placer dans le repère orthonormal (indispensable pour pouvoir utiliser la formule donnant le produit scalaire de deux vecteurs grâce à leurs coordonnées) : $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On a $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $D\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix}1/3\\0\\1\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}-2/3\\0\\1\end{pmatrix}$ et on a alors :

$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BL} = (-1) \times \left(-\dfrac{2}{3}\right) + 1 \times 0 + 0 \times 1 = \dfrac{2}{3} \neq 0$ donc $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BL}$ ne sont pas orthogonaux, ce qui interdit au triangle DBL d'être rectangle en B.

4) La proposition 5 est fausse : on peut construire un contrexemple avec un graphe de f presque plat à certains endroits, de façon à rendre l'aire du domaine grisé inférieure à 1,5 u.a.



Exercice 4 (SPÉCIALITÉ)

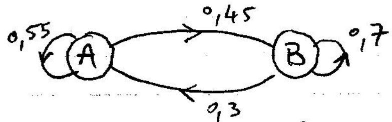
1) La proposition 1 est vraie. En effet si le chiffre des unités de n^2+n était égal à 4, on aurait $n^2+n = 4+10k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, ce qui impliquerait que n^2+n-4 est divisible par 10 et donc aussi par 5.
On aurait alors $n^2+n \equiv 4\,[5]$. Or :

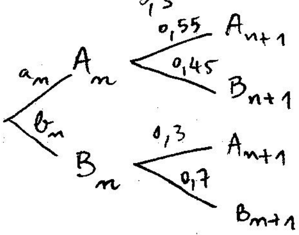
- si $n \equiv 0\,[5]$, $n^2+n \equiv 0^2+0\,[5]$, d'où $n^2+n \equiv 0\,[5]$
- si $n \equiv 1\,[5]$, $n^2+n \equiv 1^2+1\,[5]$, d'où $n^2+n \equiv 2\,[5]$
- si $n \equiv 2\,[5]$, $n^2+n \equiv \underbrace{2^2+2}_{6}\,[5]$, d'où $n^2+n \equiv 1\,[5]$ (vu que $6 \equiv 1\,[5]$)
- si $n \equiv 3\,[5]$, $n^2+n \equiv \underbrace{3^2+3}_{12}\,[5]$, d'où $n^2+n \equiv 2\,[5]$ (vu que $12 \equiv 2\,[5]$)
- si $n \equiv 4\,[5]$, $n^2+n \equiv \underbrace{4^2+4}_{20}\,[5]$, d'où $n^2+n \equiv 0\,[5]$ (vu que $20 \equiv 0\,[5]$).

Ainsi, n^2+n n'est jamais congru à 4 modulo 5, ce qui prouve que la proposition 1 est vraie.

2) La proposition 2 est vraie. En effet pgcd$(20;n)$ est un entier positif qui divise en particulier 20 donc $0 < \text{pgcd}(20;n) \leqslant 20$, d'où $0 < u_n \leqslant \frac{20}{n}$.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{20}{n} = 0$, le théorème des gendarmes prouve que (u_n) converge vers 0.

3) La proposition 3 est fausse (le produit matriciel n'est pas commutatif).
Contrexemple : si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
donc $AB \neq BA$.

4) Comme $X_{n+1} = MX_n$, on a $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}55\,a_n + 0{,}3\,b_n \\ b_{n+1} = 0{,}45\,a_n + 0{,}7\,b_n \end{cases}$. Il faut faire l'hypothèse que M est la matrice de transition correspondant au graphe probabiliste suivant : 

. La situation peut aussi être modélisée par l'arbre : 

, ce qui impose $p_{A_n}(B_{n+1}) = 0{,}45$
$\rightarrow$ La proposition 4 est vraie.

5) Comme $a_1 + b_1 = 1$, on a $b_1 = 3a_1 \iff (a_1, b_1) = \left(\frac{1}{4} ; \frac{3}{4}\right)$. Si un tel état initial (a_0, b_0) existait on aurait $\begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}75 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$, or M est inversible d'inverse $M^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}8 & -1{,}2 \\ -1{,}8 & 2{,}2 \end{pmatrix}$,
ce qui implique $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}2 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}$ impossible car on doit avoir $a_0 \geqslant 0$
$\rightarrow$ La proposition 5 est fausse.