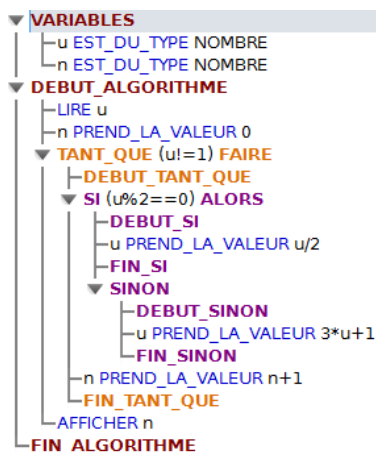


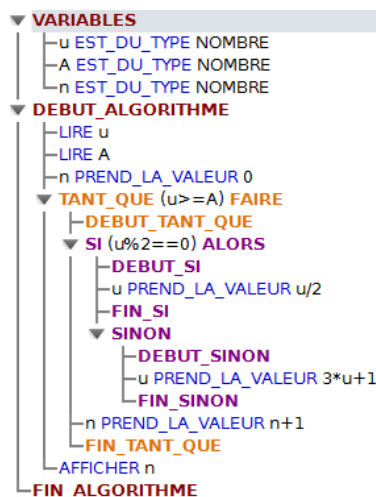
Correction du devoir de Noël

**I** 1)  $u_0 = 35$  est impair donc  $u_1 = 3 \times u_0 + 1 = 3 \times 35 + 1 = 106$ ;  $u_1 = 106$  est pair donc  $u_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{106}{2} = 53$ ;  $u_2 = 53$  est impair donc  $u_3 = 3 \times u_2 + 1 = 3 \times 53 + 1 = 160$  et ainsi de suite :  $u_4 = 80, u_5 = 40, u_6 = 20, u_7 = 10, u_8 = 5, u_9 = 16, u_{10} = 8, u_{11} = 4, u_{12} = 2, u_{13} = 1, u_{14} = 4, u_{15} = 2, u_{16} = 1, u_{17} = 4, u_{18} = 2, u_{19} = 1$  et  $u_{20} = 4$ .

2)3)



Algorithme du 2)



Algorithme du 3)

↔ Lorsque  $u_0 = 2016$ , le plus petit rang  $n$  pour lequel  $u_n = 1$  est  $n = 112$ .

**II** 1)a)  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par produit et somme et pour tout réel  $x, h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$ . On en déduit :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$\alpha$	$+\infty$
$x + 1$		-	0	+	+
$x - 1$		-	-	0	+
$h'(x)$		+	0	-	0
$h$	$-\infty$	↖ -1 ↗	$-5$	↘ 0 ↙	$+\infty$

(( détails :  $h(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) - 3 = -1$  et  $h(1) = 1^3 - 3 \times 1 - 3 = -5$  ))

Si  $x \neq 0$ , on a  $h(x) = x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$ . Par produit et somme, on a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$  et comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ , on obtient par produit :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$ . De même  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$  et comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ , on déduit par produit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ .

1)b) • D'après son tableau des variations, la fonction  $h$  possède un maximum égal à  $-1$  sur  $] - \infty; 1]$ . Par conséquent, pour tout  $x \leq 1$ , on a  $h(x) \leq -1 < 0$ , ce qui entraîne que l'équation  $h(x) = 0$  ne possède aucune solution dans  $] - \infty; 1]$ .

• La fonction  $h$  est continue (car dérivable, cf 1.a.) et strictement croissante sur  $]1; +\infty[$ ; on a :  $h(1) = -5$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ . Or  $0 \in ]-5; +\infty[$ , donc d'après le corollaire du T.V.I., l'équation  $h(x) = 0$  possède une unique solution  $\alpha$  dans  $]1; +\infty[$ .

• Bilan : l'équation  $h(x) = 0$  possède pour unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .

La calculatrice fournit :  $2,1 < \alpha < 2,11$ .

1)c) On déduit du tableau des variations de  $h$  (complété, cf 1.a.) :

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$h$		0	

2)a)  $x \mapsto x^3 - 7x - 21$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  par produit et somme et  $x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ , par conséquent  $f = uv$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  de dérivée  $f' = u'v + uv'$ .

Ainsi, pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) = (3x^2 - 7)\sqrt{x} + (x^3 - 7x - 21) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , soit :

$$f'(x) = \frac{2(3x^2 - 7)\sqrt{x^2} + x^3 - 7x - 21}{2\sqrt{x}} = \frac{2x(3x^2 - 7) + x^3 - 7x - 21}{2\sqrt{x}} \text{ et finalement :}$$

$$f'(x) = \frac{6x^3 - 14x + x^3 - 7x - 21}{2\sqrt{x}} = \frac{7x^3 - 21x - 21}{2\sqrt{x}} = \frac{7h(x)}{2\sqrt{x}}.$$

2)b) Comme  $7 > 0$  et  $2\sqrt{x} > 0$  lorsque  $x > 0$ , on déduit que  $f'$  est du signe de  $h$  sur  $]0; +\infty[$ .

D'où, d'après 1.c. :

$x$	$0$	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f$	$0$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(( détail :  $f(0) = (0^3 - 7 \times 0 - 21) \times \sqrt{0} = 0$  ))

Si  $x \neq 0$ , on a  $x^3 - 7x - 21 = x^3 \left(1 - \frac{7}{x^2} - \frac{21}{x^3}\right)$ . Par produit et somme, on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{7}{x^2} - \frac{21}{x^3}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$  et comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ , on obtient par produit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 7x - 21) = +\infty$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ , d'où par produit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

2)c) On a  $h(\alpha) = 0$  donc  $\alpha^2 - 3\alpha - 3 = 0$ , soit  $\alpha^3 = 3\alpha + 3$ .

Or  $f(\alpha) = (\alpha^3 - 7\alpha - 21)\sqrt{\alpha}$ , donc  $f(\alpha) = (3\alpha + 3 - 7\alpha - 21)\sqrt{\alpha}$ , soit :

$$f(\alpha) = (-4\alpha - 18)\sqrt{\alpha} = -2(2\alpha + 9)\sqrt{\alpha}.$$

D'après son tableau des variations (cf 2.b.),  $f$  possède donc bien un minimum égal à  $-2(2\alpha + 9)\sqrt{\alpha}$  sur  $]0; +\infty[$ .