Correction du devoir de Noël

I **1)** $u_0 = 35$ est impair donc $u_1 = 3 \times u_0 + 1 = 3 \times 35 + 1 = 106$; $u_1 = 106$ est pair donc $u_2 = \dfrac{u_1}{2} = \dfrac{106}{2} = 53$; $u_2 = 53$ est impair donc $u_3 = 3 \times u_2 + 1 = 3 \times 53 + 1 = 160$ et ainsi de suite : $u_4 = 80$, $u_5 = 40$, $u_6 = 20$, $u_7 = 10$, $u_8 = 5$, $u_9 = 16$, $u_{10} = 8$, $u_{11} = 4$, $u_{12} = 2$, $u_{13} = 1$, $u_{14} = 4$, $u_{15} = 2$, $u_{16} = 1$, $u_{17} = 4$, $u_{18} = 2$, $u_{19} = 1$ et $u_{20} = 4$.

2)3)

```
VARIABLES
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE u
  n PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (u!=1) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    SI (u%2==0) ALORS
      DEBUT_SI
      u PREND_LA_VALEUR u/2
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        u PREND_LA_VALEUR 3*u+1
        FIN_SINON
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

Algorithme du 2)

```
VARIABLES
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  A EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE u
  LIRE A
  n PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (u>=A) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    SI (u%2==0) ALORS
      DEBUT_SI
      u PREND_LA_VALEUR u/2
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        u PREND_LA_VALEUR 3*u+1
        FIN_SINON
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

Algorithme du 3)

$\hookrightarrow$ Lorsque $u_0 = 2016$, le plus petit rang n pour lequel $u_n = 1$ est $n = 112$.

II 1)a) h est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et somme et pour tout réel x, $h'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$. On en déduit :

x	$-\infty$		-1		1	α		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$			$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0		$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$	
h	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	0	$\nearrow$	$+\infty$

((détails : $h(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) - 3 = -1$ et $h(1) = 1^3 - 3 \times 1 - 3 = -5$))

Si $x \neq 0$, on a $h(x) = x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$. Par produit et somme, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$ et comme $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$, on obtient par produit : $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$.
De même $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right) = 1 + 0 + 0 = 1$ et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, on déduit par produit que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

1)b) • D'après son tableau des variations, la fonction h possède un maximum égal à -1 sur $]-\infty;1]$. Par conséquent, pour tout $x \leqslant 1$, on a $h(x) \leqslant -1 < 0$, ce qui entraîne que l'équation $h(x)=0$ ne possède aucune solution dans $]-\infty;1]$.
• La fonction h est continue (car dérivable, cf 1.a.) et strictement croissante sur $]1;+\infty[$; on a : $h(1)=-5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$. Or $0 \in]-5;+\infty[$, donc d'après le corollaire du T.V.I., l'équation $h(x)=0$ possède une unique solution α dans $]1;+\infty[$.
• Bilan : l'équation $h(x)=0$ possède pour unique solution α dans $\mathbb{R}$.
La calculatrice fournit : $2,1 < \alpha < 2,11$.

1)c) On déduit du tableau des variations de h (complété, cf 1.a.) :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
h		$-$	0	$+$	

2)a) $x \overset{u}{\mapsto} x^3-7x-21$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et somme et $x \overset{v}{\mapsto} \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, par conséquent $f=uv$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ de dérivée $f'=u'v+uv'$.
Ainsi, pour tout $x>0$, $f'(x)=(3x^2-7)\sqrt{x}+(x^3-7x-21)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, soit :
$f'(x)=\dfrac{2(3x^2-7)\sqrt{x}^2+x^3-7x-21}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2x(3x^2-7)+x^3-7x-21}{2\sqrt{x}}$ et finalement :
$f'(x)=\dfrac{6x^3-14x+x^3-7x-21}{2\sqrt{x}}=\dfrac{7x^3-21x-21}{2\sqrt{x}}=\dfrac{7h(x)}{2\sqrt{x}}$.

2)b) Comme $7>0$ et $2\sqrt{x}>0$ lorsque $x>0$, on déduit que f' est du signe de h sur $]0;+\infty[$.
D'où, d'après 1.c. :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

((détail : $f(0)=(0^3-7\times0-21)\times\sqrt{0}=0$))

Si $x\neq0$, on a $x^3-7x-21=x^3\left(1-\frac{7}{x^2}-\frac{21}{x^3}\right)$. Par produit et somme, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{7}{x^2}-\frac{21}{x^3}\right)=1+0+0=1$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$, on obtient par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-7x-21)=+\infty$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$, d'où par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2)c) On a $h(\alpha)=0$ donc $\alpha^2-3\alpha-3=0$, soit $\alpha^3=3\alpha+3$.
Or $f(\alpha)=(\alpha^3-7\alpha-21)\sqrt{\alpha}$, donc $f(\alpha)=(3\alpha+3-7\alpha-21)\sqrt{\alpha}$, soit :
$f(\alpha)=(-4\alpha-18)\sqrt{\alpha}=-2(2\alpha+9)\sqrt{\alpha}$.
D'après son tableau des variations (cf 2.b.), f possède donc bien un minimum égal à $-2(2\alpha+9)\sqrt{\alpha}$ sur $[0;+\infty[$.