

Nombres complexes : révision

Correction de l'exercice 2

$$\begin{aligned} a) \quad f(3-2i) &= i(\overline{3-2i} - 1) - 3(3-2i-i) \\ &= i(3+2i-1) - 3(3-3i) \\ &= i(2+2i) - 9 + 9i \\ &= 2i - 2 - 9 + 9i = -11 + 11i \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{si } z = a+bi \text{ avec} \\ a, b \text{ réels, alors} \\ \bar{z} = a-bi \end{array} \right\}$$



$$i^2 = -1 \quad \downarrow$$

b) Posons $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ (de sorte que $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$).

$$\begin{aligned} f(z) = -5 + i &\Leftrightarrow i(x - yi - 1) - 3(x + yi - i) = -5 + i \\ &\Leftrightarrow ix + y - i - 3x - 3yi + 3i = -5 + i \\ &\Leftrightarrow \underbrace{y - 3x}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(x - 3y + 2)}_{\in \mathbb{R}} i = -5 + 1 \cdot i \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 3x = -5 \\ \text{et} \\ x - 3y + 2 = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{par unicité de la forme} \\ \text{algébrique d'un nombre complexe} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 5 \\ \text{et} \\ x - 3(3x - 5) + 2 = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 5 \\ \text{et} \\ x - 9x + 15 + 2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 5 \\ \text{et} \\ -8x = -16 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \cdot 2 - 5 = 1 \\ \text{et} \\ x = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow z = 2 + i$$

c) En notant $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$, le même calcul que celui mené au début de la question précédente conduit à :

$$f(z) = \underbrace{y - 3x}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(x - 3y + 2)}_{\in \mathbb{R}} i \quad \text{donc } f(z) = y - 3x = \operatorname{Im} z - 3 \operatorname{Re} z.$$

d) $M' \in (O\vec{z}) \Leftrightarrow z_{M'}$ est un imaginaire pur

$$\Leftrightarrow f(z) \text{ est un imaginaire pur}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}[f(z)] = 0 \quad \Leftrightarrow \operatorname{Im} z - 3 \operatorname{Re} z = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 3 \operatorname{Re} z$$

$$\Leftrightarrow M \text{ appartient à la droite d'équation } y = 3x.$$