Nombres complexes : révisions

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1) À tout point M du plan d'affixe $z \neq 1$, on associe le point M' dont l'affixe est égale à :

$$z' = \frac{5z^2 - 1}{z - 1} .$$

a) Déterminer les coordonnées du point M' lorsque M a pour coordonnées $(2, -2)$.

b) Déterminer les coordonnées des points M tels que M' ait pour coordonnées $(6, 0)$.

c) On note $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$; montrer que $\mathrm{Im}(z') = \dfrac{5y\left(x^2 - 2x + y^2 + \frac{1}{5}\right)}{(x-1)^2 + y^2}$.

d) En déduire l'ensemble des points M tels que M' appartienne à l'axe des abscisses.

2) À tout complexe z, on associe le complexe $f(z) = \mathrm{i}\,(\overline{z} - 1) - 3(z - \mathrm{i})$.

a) Calculer $f(3 - 2\,\mathrm{i})$.

b) Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $f(z) = -5 + \mathrm{i}$.

c) Montrer que $\mathrm{Re}[f(z)] = \mathrm{Im}(z) - 3\,\mathrm{Re}(z)$.

d) On note M (resp. M') le point d'affixe z (resp. $f(z)$). Déterminer l'ensemble des points M tels que M' appartienne à l'axe des ordonnées.