Correction de l'exercice n°34 p 79

1. (a) f est dérivable par produit sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + x \times \mathrm{e}^x$, d'où $f'(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $x+1$.

   (b) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$. On en déduit :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

   (Détail : $f(-1) = -1 \times \mathrm{e}^{-1} = -\frac{1}{\mathrm{e}}$.)

2. (a) L'équation de T est : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. Or $f'(0) = (0+1) \times \mathrm{e}^0 = 1$ et $f(0) = 0 \times \mathrm{e}^0 = 0$, donc T a pour équation $y = x$.

   (b) • Si $x \geqslant 0$, on a $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0$ (par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$) donc $\mathrm{e}^x \geqslant 1$. Comme $x \geqslant 0$, on en déduit que $x \times \mathrm{e}^x \geqslant x \times 1$, soit $f(x) \geqslant x$.

   • Si $x \leqslant 0$, on a $\mathrm{e}^x \leqslant \mathrm{e}^0$ (par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$) donc $\mathrm{e}^x \leqslant 1$. Comme $x \leqslant 0$, on en déduit que $x \times \mathrm{e}^x \geqslant x \times 1$, soit $f(x) \geqslant x$.

   (c) D'après ce qui précède, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant x$. Cela prouve que $\mathscr{C}$ est toujours au dessus de T.

3. Allure du graphe de f :