Exercice 4 (Barème sur 10) BBTS 2015.2016

1) a)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

1

b) On peut conjecturer que (u_n) est décroissante à partir de $n=1$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons P_n : « $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n$ ».

Init . $u_1 = 3,4$ et $\frac{15}{4} \times 0,5 = \frac{15}{8}$ Or $3,4 \geqslant \frac{15}{8}$ donc P_1 est vraie.

Hérédité : Montrons que si P_n est vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, alors P_{n+1} est vraie aussi.

Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n$. Montrons qu'alors $u_{n+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^{n+1}$.

$u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n \iff \frac{1}{5} \times u_n \geqslant \frac{1}{5} \times \frac{15}{4} \times 0,5^n$ car $\frac{1}{5} > 0$

$\iff \frac{1}{5} u_n \geqslant \frac{3}{4} \times 0,5^n$

$\iff \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0,5^n \geqslant \frac{3}{4} \times 0,5^n + 3 \times 0,5^n$ par somme

2

$\iff u_{n+1} \geqslant 0,5^n \left(\frac{3}{4} + 3\right)$

$\iff u_{n+1} \geqslant 0,5^n \left(\frac{3+12}{4}\right)$

$\iff u_{n+1} \geqslant 0,5^n \times \frac{15}{4}$

Or $0,5^n \times \frac{15}{4} \geqslant 0,5^{n+1} \times \frac{15}{4}$ (car $0,5^{n+1} = 0,5^n \times 0,5$ et $0,5 < 1$)

Donc on a : si $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n$ alors $u_{n+1} \geqslant 0,5^{n+1} \times \frac{15}{4}$.

Ainsi si P_n est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, alors P_{n+1} est vraie.

. Donc par principe de récurrence P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0,5^n - u_n$

$= -\frac{4}{5} u_n + 3 \times 0,5^n$.

Or $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n \iff -\frac{4}{5} u_n \leqslant -\frac{4}{5} \times \left(\frac{15}{4} \times 0,5^n\right)$ car $-\frac{4}{5} < 0$.

1,5

$\iff -\frac{4}{5} u_n \leqslant -3 \times 0,5^n$.

donc $u_{n+1} - u_n \leqslant -3 \times 0,5^n + 3 \times 0,5^n$, soit $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

3) a) $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 10 \times 0,5^{n+1}$

$= \frac{1}{5} u_n + 3 \times 0,5^n - 10 \times 0,5^{n+1}$

$= \frac{1}{5} \left(v_n + 10 \times 0,5^n\right) + 3 \times 0,5^n - 10 \times 0,5^{n+1}$

1,5

$= \frac{1}{5} v_n + 2 \times 0,5^n + 3 \times 0,5^n - 10 \times 0,5^{n+1}$

$= \frac{1}{5} v_n + 5 \times 0,5^n - 10 \times 0,5^{n+1}$.

Or $10 \times 0,5^{n+1} = 10 \times 0,5 \times 0,5^n = 5 \times 0,5^n$

donc $\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{5} v_n}$ Donc $\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{5}}$

0,5 $\boxed{v_0} = u_0 - 10\times 0,5^0$

$= 2 - 10$

$= \boxed{-8}$

3.b) (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = -8$

Or $v_n = v_0 \times q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $v_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$.

0,75 $u_n = v_n + 10\times 0,5^n \iff \boxed{u_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0,5^n}$

c) $0<\left(\frac{1}{5}\right)<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$. De même $0<0,5<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(0,5)^n = 0$

1 Par produit on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(10\times 0,5^n) = 0$, donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

4.a) Tant que $u > 0,01$

u prend la valeur $\frac{1}{5}u + 3\times 0,5^n$

n prend la valeur $n+1$

Ou

Tant que $u > 0,01$

n prend la valeur $n+1$

u prend la valeur $-8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times(0,5)^n$.

1

4.b) On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc tout intervalle ouvert contenant 0, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Ainsi à partir d'un certain rang, $u_n \in]-0,01;0,01[$ à partir d'un certain rang et donc que l'algorithme s'arrête

0,75 On peut donc conclure que $u_n < 0,01$ à partir d'un certain rang