Bac Blanc TS 2016 : correction de l'exercice n°2 (spécialité)

1) **a)** [**0,5 point**] Si $(u, v) = (-2, 1)$, alors $3u+7v = 1$. On en déduit que $3\times 800u+7\times 800v = 800$, donc $(x_0, y_0) = (800u, 800v) = (-1600, 800)$ est une solution de l'équation (E).

b) [**1 point**] • Supposons que (x, y) soit une solution de (E). On a $3x + 7y = 800$, soit $3x + 7y = 3x_0 + 7y_0$, ou encore $3(x - x_0) = 7(y_0 - y)$. On en déduit en particulier que 3 divise $7(y_0 - y)$ et comme 3 et 7 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss montre que 3 divise $y_0 - y$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y_0 - y = 3k$, soit $y = y_0 - 3k$. Comme $3(x - x_0) = 7(y_0 - y)$, on obtient $3(x - x_0) = 7 \times 3k$, d'où $x - x_0 = 7k$, soit $x = x_0 + 7k$. Finalement (x, y) s'écrit sous la forme $(x_0 + 7k, y_0 + 3k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
• Réciproquement, si $k \in \mathbb{Z}$, $(x_0 + 7k, y_0 + 3k)$ est bien solution de (E) car :
$3(x_0 + 7k) + 7(y_0 - 3k) = 3x_0 + 21k + 7y_0 - 21k = 3x_0 + 7y_0 = 800$.

2) **a)** [**0,5 point**] • On a $800 = 114 \times 7 + 2$ et $0 \leqslant 2 < 7$ donc 2 est le reste dans la division euclidienne de 800 par 7 ; on a en particulier $800 \equiv 2\ [7]$.
• Si (x, y) est une solution de (G), on a $7y^2 = 3x^2 - 800$ donc 7 divise $3x^2 - 800$, d'où $3x^2 \equiv 800\ [7]$ et finalement $3x^2 \equiv 2\ [7]$ car $800 \equiv 2\ [7]$.

b) [**1 point**] Si r est le reste dans la division euclidienne de x par 7, on a $x \equiv r\ [7]$, donc $3x^2 \equiv 3r^2\ [7]$, ce qui signifie que $3x^2$ et $3r^2$ ont même reste dans la division euclidienne par 7. D'où :

Reste r de la division euclidienne de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7.	0	3	5	6	6	5	3

(Exemple : si $r = 4$, on a $3r^2 = 48$ donc le reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7 est celui de la division euclidienne de 48 par 7, c'est-à-dire 6.)

Le reste de la division euclidienne de x par 7 appartenant forcément à l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $3x^2$ est congru à 0, 3, 5 ou 6 modulo 7.

c) [**0,5 point**] D'après 2.a., si l'équation (G) possédait une solution (x, y), on aurait $3x^2 \equiv 2\ [7]$, ce qui contredirait le résultat obtenu à la question précédente.
Conclusion : l'équation (G) ne possède aucune solution.

3) **a)** [**1 point**] • Si $n \equiv 0\ [3]$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k$, d'où $2^n = 2^{3k} = 8^k$. Or $8 \equiv 1\ [7]$, donc $8^k \equiv 1^k\ [7]$, soit $2^n \equiv 1\ [7]$.
• Si $n \equiv 1\ [3]$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k + 1$, d'où $2^n = 2^{3k+1} = 2 \times 8^k$. Comme $8 \equiv 1\ [7]$, on a $2 \times 8^k \equiv 2 \times 1^k\ [7]$, soit $2^n \equiv 2\ [7]$.
• Si $n \equiv 2\ [3]$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k + 2$, d'où $2^n = 2^{3k+2} = 4 \times 8^k$. Comme $8 \equiv 1\ [7]$, on a $4 \times 8^k \equiv 4 \times 1^k\ [7]$, soit $2^n \equiv 4\ [7]$.
• Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.

b) [**0,5 point**] Raisonnons par l'absurde en supposant que (G_n) possède une solution (x, y). On a alors $3x^2 - 800^n = 7y^2$, donc $7 \mid 3x^2 - 800^n$, soit $3x^2 \equiv 800^n\ [7]$. Or $800 \equiv 2\ [7]$, donc $800^n \equiv 2^n\ [7]$ et on obtient $3x^2 \equiv 2^n\ [7]$. Ceci est impossible car $3x^2$ est congru à 0, 3, 5 ou 6 modulo 7, alors que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
Conclusion : l'équation (G_n) ne possède aucune solution.