Bac Blanc TS 2016 : correction de l'exercice n°1 (Q.C.M.)

Chaque bonne réponse rapportait $0,9$ point. Un candidat qui a répondu correctement à n questions a obtenu la note : $N = \min\left(\dfrac{9n}{10}\,,\,5\right)$.

• **1)→ réponse b**. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$; $\dfrac{12+z}{z-1} = 1-2z \Leftrightarrow 12+z = (z-1)(1-2z)$, ce qui équivaut à $2z^2 - 2z + 13 = 0$ (détail du calcul laissé au lecteur). Il s'agit d'une équation du second degré à coefficients réels dont le discriminant vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times 13 = -100 < 0$. L'équation possède donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2+\mathrm{i}\sqrt{100}}{2\times 2} = \frac{2+10\,\mathrm{i}}{4} = \frac{1}{2}+\frac{5}{2}\,\mathrm{i} \ \text{ et } \ z_2 = \overline{z_1} = \frac{1}{2}-\frac{5}{2}\,\mathrm{i}\,.$$

• **2)→ réponse d**. L'affixe de M$(4\,;-8)$ est $z = 4-8\,\mathrm{i}$. On a $\overline{z} = 4+8\,\mathrm{i}$ et l'affixe de M' est alors :
$z' = \dfrac{\mathrm{i}\,(4+8\,\mathrm{i})-1}{(4+8\,\mathrm{i})+2} = \dfrac{-9+4\,\mathrm{i}}{6+8\,\mathrm{i}} = \dfrac{(-9+4\,\mathrm{i})(6-8\,\mathrm{i})}{(6+8\,\mathrm{i})(6-8\,\mathrm{i})} = \dfrac{-54+72\,\mathrm{i}+24\,\mathrm{i}+32}{6^2+8^2} = \dfrac{-22+96\,\mathrm{i}}{100}$, d'où :
$z' = -0,22+0,96\,\mathrm{i}$. Finalement, M a pour coordonnées $(-0,22\,;0,96)$.

• **3)→ réponse c**. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{-2\}$; notons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
On a $\overline{z} = x-y\,\mathrm{i}$, donc $z' = \dfrac{\mathrm{i}\,(x-y\,\mathrm{i})-1}{(x-y\,\mathrm{i})+2} = \dfrac{y-1+x\,\mathrm{i}}{x+2-y\,\mathrm{i}} = \dfrac{(y-1+x\,\mathrm{i})(x+2+y\,\mathrm{i})}{(x+2-y\,\mathrm{i})(x+2+y\,\mathrm{i})}$,

d'où $z' = \dfrac{(y-1)(x+2)-xy+[y(y-1)+x(x+2)]\,\mathrm{i}}{(x+2)^2+y^2}$,

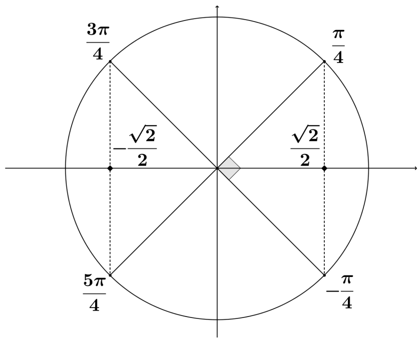
soit $z' = \underbrace{\dfrac{2y-x-2}{(x+2)^2+y^2}}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\dfrac{x^2+y^2+2x-y}{(x+2)^2+y^2}}_{\in\mathbb{R}}\,\mathrm{i}$, d'où $\mathrm{Re}(z') = \dfrac{2y-x-2}{(x+2)^2+y^2}$.

Par conséquent, M' appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si $\dfrac{2y-x-2}{(x+2)^2+y^2} = 0$, ce qui équivaut à $2y-x-2 = 0$, ou encore à $y = \dfrac{1}{2}x+1$. Finalement, M' appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si M appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x+1$, privée du point d'affixe -2 [c'est-à-dire privée du point de coordonnées $(-2\,;0)$].

• **4)→ réponse d**. Si $x \in \mathbb{R}$, $f\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\cos\left[3\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)-\dfrac{\pi}{3}\right] = 2\cos\left(3x+2\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)$,
d'où $f\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right) = 2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$, car la fonction cos est $2\pi-$périodique. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right) = f(x)$, ce qui prouve que la fonction f est $\dfrac{2\pi}{3}-$périodique.

• **5)→ réponse c**. $f : x \mapsto 2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition, de dérivée $f' : x \mapsto 2\times 3\times\left[-\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)\right] = -6\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.
D'où $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -6\sin\left(3\times\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right) = -6\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3}$.

• **6)**$\rightarrow$ **réponse a**. Soit $x \in \mathbb{R}$; $|f(x)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2\left|\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
donc $|f(x)| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.



On en déduit que $|f(x)| = \sqrt{2}$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{4} + k \times \dfrac{\pi}{2}$, ce qui équivaut à $3x = \dfrac{\pi}{12} + k \times \dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire à $x = \dfrac{\pi}{36} + k \times \dfrac{\pi}{6}$.