Corrigé exo3 BB 2016 (barème sur 10 points) TS

1) a) $g(x) = 1 - x + e^x$.

* **en $-\infty$** : $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$ par produit avec $-1 < 0$.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

  donc, par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - x + e^x) = +\infty$.

* **en $+\infty$** : on factorise $g(x)$ (car forme indéterminée par la somme)
  pour tout réel $x$,
  $g(x) = e^x \left( \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} + 1 \right)$

  * $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

  * $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par croissance comparée donc, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

  donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left( \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} + 1 \right) = 1$

(1,5) Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, on a, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

b) $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (énoncé) et pour tout réel $x$, $g'(x) = -1 + e^x$

On étudie le signe de $g'(x)$ :

$g'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff e^x = e^0 \iff x = 0$
$g'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff e^x > e^0 \iff x > 0$

} on utilise ici la stricte croissance de l'exponentielle.

⚠ Résoudre $g'(x) \geqslant 0$ ne permet pas de justifier le signe de $g'(x)$.

On peut dresser le tableau de variation de $g$ sur $\mathbb{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $2$ | ↗ | $+\infty$ |

$g(0) = 1 - 0 + e^0 = 2$.

$g$ admet donc 2 comme minimum sur $\mathbb{R}$ donc pour tout réel $x$, $g(x) \geqslant 2 > 0$.

(1,75) Donc $g$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2) $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$

* **en $-\infty$** (il n'y a pas de forme indéterminée !)

  * $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$

  * $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$ (car $e^x > 0$ pour tout réel $x$) donc par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$

Donc, par somme, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

• <u>en $+\infty$</u> : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (déjà justifié au 1) a))

1,25 Donc, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3) Pour tout réel $x$, $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (énoncé).
On pose $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$, u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et v ne s'annule pas, donc $\frac{u}{v}$ est dérivable et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

En appliquant cette formule, on obtient : pour tout réel $x$,

$$f'(x) = 1 + \frac{1 \times e^x - x \times e^x}{(e^x)^2}$$
$$= 1 + \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2}$$
$$= 1 + \frac{1-x}{e^x}$$
$$= \frac{e^x + 1 - x}{e^x}$$
$$= \frac{g(x)}{e^x}$$

1 $$= e^{-x} g(x).$$

4) Pour tout réel $x$, $g(x) > 0$ (par 1) b)) et $e^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0$

d'où :

| $x$ | $-\infty$            $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | + |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ $+\infty$ |

0,75

5) • f est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
• f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $0 \in \left]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) ; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$

Donc, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution réelle $\alpha$ sur $\mathbb{R}$.

$f(-1) = -1 + 1 + \frac{-1}{e^{-1}} = -e < 0$ car $e > 0$

$f(0) = 0 + 1 + \frac{0}{e^0} = 1 > 0$

donc $f(-1) < f(\alpha) < f(0)$ car $f(\alpha) = 0$.

1,5 donc, par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}$, $-1 < \alpha < 0$.

6) a) On connaît la forme de l'équation réduite d'une tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a ($a \in \mathbb{R}$)

ici $a=0$ donc $T_0 : y = f'(0)(x-0)+f(0)$

or $f'(0) = e^{-0} \times g(0) = 1 \times 2 = 2$ et $f(0)=1$

0,5 donc $T_0$ a bien pour équation : $y = 2x+1$ $(T_0 = T)$

Rem : on peut aussi vérifier que la droite $T$ proposée a pour coefficient directeur $f'(0)$ et qu'elle passe par le point de coordonnées $(0;1)$.

b) On étudie le signe de la différence $f(x)-(2x+1)$ :

pour tout réel $x$, $f(x)-(2x+1) = -x + \dfrac{x}{e^x}$

$$= x\left(\frac{1}{e^x} - 1\right)$$

$$= x\left(e^{-x} - 1\right)$$

Pour étudier le signe de ce produit, on étudie le signe de $(e^{-x}-1)$ :

- $e^{-x} - 1 = 0 \iff e^{-x} = 1 \iff e^{-x} = e^0 \iff -x = 0 \iff x = 0$
- $e^{-x} - 1 > 0 \iff e^{-x} > 1 \iff e^{-x} > e^0 \iff -x > 0 \iff x < 0$.

d'où :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $e^{-x}-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)-(2x+1)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | |

1,25

Conclusion : • $f(x) = (2x+1) \iff x = 0$ donc $\mathcal{C}$ et $T$ ont un unique point d'intersection, il s'agit du point d'abscisse 0

• $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x)-(2x+1) < 0$ c.à.d. $f(x) < 2x+1$ donc $\mathcal{C}$ est en dessous de $T$ sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0;+\infty[$

c) On sait par b) que, pour tout $x \neq 0$, $2x+1 > f(x)$ donc, pour $x = -\frac{1}{2}$, $0 > f(-\frac{1}{2})$ ou encore $f(\alpha) > f(-\frac{1}{2})$

0,5 donc $\alpha > -\frac{1}{2}$ par stricte croissance de $f$ sur $\mathbb{R}$.

donc on a bien : $-0,5 < \alpha < 0$.