Lois de probabilité

I Loi binomiale.

1 Épreuve de Bernoulli.

On s'intéresse ici aux expériences aléatoires à deux issues (S : « succès » ; $\overline{S}$: « échec »).
On note souvent $p = p(S)$ et $q = p(\overline{S}) = 1 - p$.

Exemple : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes ; $S =$ « la carte est un coeur » et $\overline{S} =$ « la carte n'est pas un coeur » . On a $p = \frac{1}{4}$ et $q = \frac{3}{4}$.

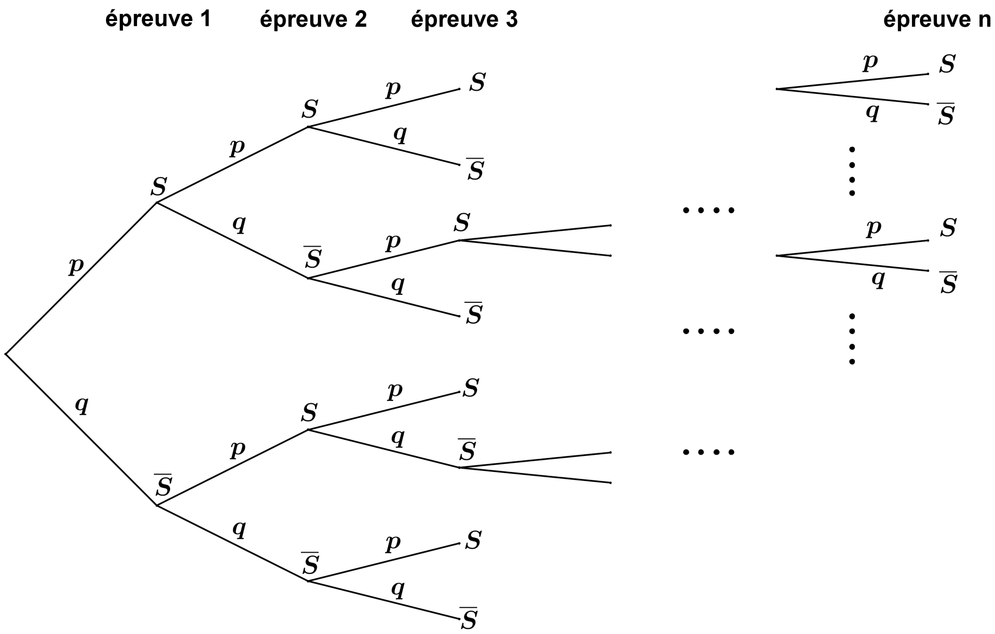
Définition : Lorsqu'on répète n fois une épreuve de Bernoulli identique de façon à ce que le résultat à une épreuve n'influence pas les autres résultats (on parle d'*épreuves indépendantes*), on effectue un *schéma de Bernoulli.*

Exemple : Tirer une carte dans un jeu de 32 cartes, 20 fois de suite, en regardant à chaque fois s'il s'agit d'un coeur (avec remise de la carte tirée dans le jeu à chaque fois pour que les épreuves soient indépendantes).

2 Loi binomiale.

a. Arbre pondéré associé à un schéma de Bernoulli.

On considère le schéma de Bernoulli obtenu en répétant n fois une épreuve élémentaire de succès S. On note $p = p(S)$ et $q = p(\overline{S}) = 1 - p$. L'arbre pondéré modélisant la situation est le suivant :



Notation : Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Le nombre de chemins dans l'arbre précédent qui contiennent exactement k fois la lettre « S » (et donc $n-k$ fois le symbole $\overline{S}$) est noté $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ».

Propriété (dite « du triangle de Pascal ») :
Si k et n sont deux entiers tels que $0 \leqslant k < n$, on a : $\boxed{\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}}$.

↪ Cela permet de construire le tableau suivant (appelé « triangle de Pascal ») dans lequel le coefficient $\binom{n}{k}$ figure à l'intersection de la ligne numéro n et de la colonne numéro k :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

b. Loi binomiale.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$. On dit que la variable aléatoire X suit la *loi binomiale* de paramètres n et p (notée parfois $\mathscr{B}(n;p)$) lorsque pour tout entier k entre 0 et n :

$$\boxed{p(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k}} \qquad \text{avec } q = 1-p$$

Théorème : Soit une épreuve de Bernoulli avec $p = p(S)$ (et $q = p(\overline{S}) = 1-p$) répétée n fois de façon indépendante et X le nombre de succès (nombre de fois où on obtient S). Alors X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Preuve : L'arbre de la partie 2.a. permet de modéliser la situation. Si k est un entier entre 0 et n, les chemins favorables à l'événement $(X=k)$ sont ceux qui contiennent k fois la lettre S (et donc $n-k$ fois le symbole $\overline{S}$). Ils sont au nombre de $\binom{n}{k}$ et chaque résultat associé à un tel chemin a une probabilité égale à $p^k q^{n-k}$ (produit des probabilités inscrites sur chacune des branches constituant le chemin). On a donc $p(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k}$, ce qui prouve bien que X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Propriétés (Espérance, variance et écart-type) : Si la variable X suit la loi binomiale de paramètres n et p, alors : $\mathrm{E}(X) = np$; $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Exercices d'application (résolus).

1) On lance 100 fois de suite un dé équilibré à 6 faces.
– Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 10 fois la face 6 ?
– Quelle est la probabilité d'obtenir au minimum 3 fois la face 6 ?

2) Un Q.C.M. comporte 20 questions (5 réponses possibles par question et une seule réponse est exacte).
• Si l'on répond au hasard à chacune des 20 questions du Q.C.M. , quelle est la probabilité de répondre correctement :
– à exactement 15 questions ?
– à au moins 18 questions ?
• Toujours en répondant au hasard au Q.C.M., quel nombre de bonnes réponses peut-on espérer obtenir en moyenne ?

↪ **Solutions :**

1) On peut modéliser l'expérience aléatoire par un schéma de Bernoulli obtenu en répétant 100 fois et de manière indépendante, l'épreuve élémentaire : lancer une fois le dé, avec pour succès $S =$ « on obtient 6 » et $p = p(S) = \frac{1}{6}$. Si on note X le nombre de succès (c'est-à-dire ici le nombre de fois où le 6 est apparu), alors on sait que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(100; \frac{1}{6}\right)$.
D'où : $p(X = 10) = \binom{100}{10} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{90} \approx 0,0214$ (voir rappel* concernant l'utilisation de la calculatrice pour calculer les coefficients binomiaux).
D'autre part : $p(X \geqslant 3) = 1 - p(X < 3) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)]$
$= 1 - \binom{100}{0} \times \left(\frac{1}{6}\right)^0 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{100} - \binom{100}{1} \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{99} - \binom{100}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{98} \approx 0,999997$

2) On peut modéliser l'expérience aléatoire par un schéma de Bernoulli obtenu en répétant 20 fois et de manière indépendante, l'épreuve élémentaire : répondre (de façon aléatoire) à une question du Q.C.M., avec pour succès $S =$ « la réponse est correcte » et $p = p(S) = \frac{1}{5} = 0,2$. Si on note X le nombre de succès (c'est-à-dire ici le nombre de réponses correctes), alors on sait que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(20; 0,2)$. D'où :
$p(X = 15) = \binom{20}{15} \times (0,2)^{15} \times (0,8)^5 \approx 1,7 \times 10^{-7}$ et $p(X \geqslant 18) = \displaystyle\sum_{k=18}^{20} \binom{20}{k} \times (0,2)^k \times (0,8)^{20-k}$
$= \binom{20}{18} \times (0,2)^{18} \times (0,8)^2 + \binom{20}{19} \times (0,2)^{19} \times (0,8)^1 + \binom{20}{20} \times (0,2)^{20} \times (0,8)^0 \approx 3,3 \times 10^{-11}$

D'autre part, on a $\mathrm{E}(X) = 20 \times 0,2 = 4$. Cela signifie qu'en moyenne, en répondant au hasard au Q.C.M., on peut espérer obtenir seulement 4 bonnes réponses.

($\star$) Sur une calculatrice TI, pour calculer par exemple $\binom{100}{10}$: taper « 100 », appuyer sur la touche $\boxed{\textbf{MATH}}$, choisir le menu **PRB**, sélectionner **Combinaison**, taper « 10 », valider.

$\boxed{\text{II}}$ Lois continues.

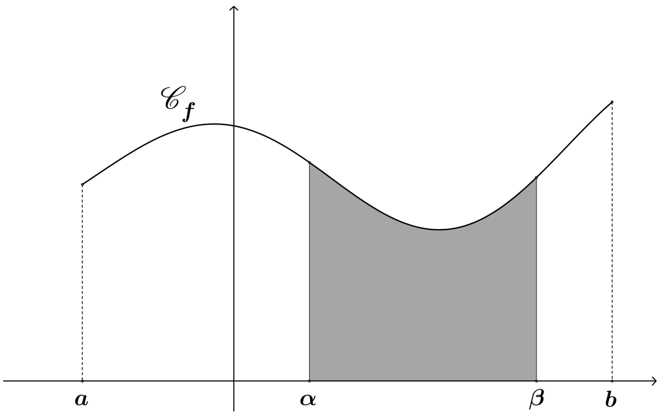
Lorsqu'une variable aléatoire X ne peut prendre que des valeurs isolées, on dit qu'elle est *discrète*. C'est le cas d'une variable qui ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (exemple : lorsque X suit une loi binomiale) ou qui ne peut prendre que des valeurs entières.

Il existe des variables aléatoires qui peuvent prendre toutes les valeurs possibles dans un intervalle de $\mathbb{R}$. Exemple : dans un disque de rayon 1 et de centre O, on choisit un point M au hasard et on note X la distance entre O et M. Alors l'ensemble image de X est $X(\Omega) = [0; 1]$.

$\boxed{1}$ Variable définie par une fonction de densité.

Définition : on dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $[a; b]$ $(a < b)$ est continue lorsqu'il existe une fonction f continue sur $[a; b]$ et positive sur $[a; b]$ telle que :
Si $a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b$, alors $p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = p(X \in [\alpha; \beta]) = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\mathrm{d}t$.

La fonction f est appelée *densité de probabilité* associée à la variable X sur $[a; b]$.



Remarques : 1) On vérifie qu'une fonction est une densité de probabilité sur $[a; b]$, en montrant que f est positive et continue sur $[a; b]$ et que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ vaut 1.

2) Il arrive parfois que X soit continue à valeurs dans un intervalle I dont une des bornes est infinie, par exemple avec $I = [0; +\infty[$. Dans ce cas, la densité de probabilité associée est une fonction f continue sur $I = [0; +\infty[$ telle que $f \geqslant 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 1$.

D'autre part si $a \geqslant 0$, on a : $p(X \geqslant a) = p(X \in [a; +\infty[) = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

3) Lorsque $a < b$, on note parfois $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{[a;b]} f(t)\mathrm{d}t$.

4) Lorsque la variable X est continue, les probabilités ponctuelles sont nulles :
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $p(X = \alpha) = 0$. On en déduit par exemple que $p(X \geqslant \alpha) = p(X > \alpha)$ ou que $p(\alpha < X < \beta) = p(\alpha \leqslant X \leqslant \beta)$.