TS

<u>Correction de l'exercice "Calcul intégral, logarithme".</u>

1) $u_0 = \frac{(-1)^0}{0+1} = 1$; $u_1 = \frac{(-1)^0}{0+1} + \frac{(-1)^1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$u_2 = \frac{(-1)^0}{0+1} + \frac{(-1)^1}{1+1} + \frac{(-1)^2}{2+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$; $u_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

et $u_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$

2) On a $\int_0^1 (-x)^k dx = \int_0^1 (-1)^k x^k dx = \left[\frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}\right]_0^1 = \frac{(-1)^k}{k+1} 1^{k+1} - \frac{(-1)^k}{k+1} 0^{k+1} = \frac{(-1)^k}{k+1}$

3) D'après la question précédente, on a $u_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\int_0^1 (-x)^k dx\right]$, d'où par linéarité de l'intégrale : $u_n = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-x)^k\right) dx$. Rappelons que si θ est un nombre réel distinct de 1, on a $\sum_{k=0}^{n} \theta^k = \frac{1-\theta^{n+1}}{1-\theta}$, par conséquent $u_n = \int_0^1 \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} dx$.

On en déduit que $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{-(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} dx$ (par linéarité de l'intégrale) puis que $u_n = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$ (toujours par linéarité de l'intégrale, vu que $-(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2} = (-1)^n \times (-1)^2 = (-1)^n$). Finalement, on obtient $u_n = \ln 2 + (-1)^n I_n$, avec $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$.

4) Si $x \in [0;+\infty[$, on a $1+x \geqslant 1$ donc $\frac{1}{1+x} \leqslant \frac{1}{1} = 1$ par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, et comme $x \geqslant 0$, on obtient $0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant x^{n+1}$.

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que : $0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leqslant \int_0^1 x^{n+1} dx$, soit $0 \leqslant I_n \leqslant \left[\frac{1}{n+2} x^{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2} 1^{n+2} - \frac{1}{n+2} 0^{n+2} = \frac{1}{n+2}$.

5) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+2}$ donc comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+2} = 0$, le théorème des gendarmes entraîne que $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$. Si $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \in \{-1, 1\}$ donc $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, d'où $-I_n \leqslant (-1)^n I_n \leqslant I_n$ (car $I_n \geqslant 0$) et $\ln 2 - I_n \leqslant \ln 2 + (-1)^n I_n \leqslant \ln 2 + I_n$, soit $\ln 2 - I_n \leqslant u_n \leqslant \ln 2 + I_n$. Par somme, on a $\lim_{n \to +\infty} (\ln 2 - I_n) = \ln 2 - 0 = \ln 2$ et $\lim_{n \to +\infty} (\ln 2 + I_n) = \ln 2 + 0 = \ln 2$ donc le théorème des gendarmes prouve que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ln 2$. <u>Remarque</u>: cette propriété peut se noter $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2}$