Voilà comment traiter la question 11)a) du polycopié « Autour de la notion de divisibilité » en raisonnant par équivalence (dans ce cas, la phase finale de vérification est inutile).

$\boxed{\mathbf{11}}$ **a)** • Soit $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p-1 \mid p+11$. Comme $p-1 \mid p-1$, on a :
$p-1 \mid 1 \times (p+11) + (-1) \times (p-1)$, soit $p-1 \mid 12$.

• Réciproquement si $p-1 \mid 12$, comme $p-1 \mid p-1$, on a $p-1 \mid 1 \times 12 + 1 \times (p-1)$, soit $p-1 \mid p+11$.

Ainsi, on vient de démontrer l'équivalence logique : $p-1 \mid p+11 \iff p-1 \mid 12$.

Donc $p-1 \mid p+11 \iff p-1 \in \{\pm 1; \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$, soit :

$p-1 \mid p+11 \iff p \in \{-11; -5; -3; -2; -1;\ 0\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\,;\ 5\,;\ 7\,;\ 13\}$.

On a alors 12 équations d'inconnue p à résoudre, et puisqu'on a raisonné par équivalences, toutes les solutions seront effectives (aucune vérification ne sera nécessaire).

Remarque : comme je vous l'ai dit, cette façon de raisonner s'avère plus délicate pour traiter l'exercice 11)b). C'est possible mais à condition d'utiliser le Théorème de Gauss, que nous verrons plus tard.