# Corrigé du contrôle de Spécialité Mathématiques n°1

**I** **a)** Le trinôme $T = 30x^2 + 23x - 33$ a un discriminant égal à $\Delta = 4489 > 0$. $T$ a donc deux racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{-23-\sqrt{4489}}{60} = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-23+\sqrt{4489}}{60} = \frac{11}{15}$ et on a $T = 30\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{11}{15}\right) = 2\left(x+\frac{3}{2}\right)\times 15\left(x-\frac{11}{15}\right) = (2x+3)(15x-11)$. Ainsi lorsque $n \in \mathbb{Z}$, $30n^2 + 23 - 33 = (2n+3)(15n-3) = k(2n+3)$ avec $k = 15n-3 \in \mathbb{Z}$ (vu que $n \in \mathbb{Z}$). Cela prouve bien que $2n+3$ divise $30n^2+23n-33$.

**b)** Si $n \in \mathbb{Z}$, on a $n^4 - 1 = (n^2)^2 - 1^2 = (n^2-1)(n^2+1) = (n-1)(n+1)(n^2+1)$, d'où $n^4 - 1 = k(n+1)$, avec $k = (n-1)(n^2+1) \in \mathbb{Z}$ (vu que $n \in \mathbb{Z}$). Cela prouve bien que $n+1$ divise $n^4-1$.

**II** **a)** Cf cours.

**b)** • On a $3n+5 \mid 3n+5$ et $3n+5 \mid 7n+8$ donc : $3n+5 \mid 7\times(3n+5)+(-3)\times(7n+8)$ (car l'ensemble des multiples de $3n+5$ est stable par combinaisons linéaires à coefficients entiers), soit $3n+5 \mid 11$.
• Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $3n+5 \mid 7n+8$. D'après ce qui précède, on a $3n+5 \in \{-11;-1,1,11\}$, ce qui conduit à $3n \in \{-16;-6;-4;6\}$ et donc à $n \in \{-2;2\}$ ($-\frac{16}{3}$ et $-\frac{4}{3}$ ne sont pas entiers). Réciproquement, il est facile de vérifier que si $n \in \{-2;2\}$, alors $3n+5 \mid 7n+8$.

**c)** • Le seul réel qui annule $9x+7$ est $-\frac{7}{9}$, qui n'est pas entier, donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le quotient $\dfrac{5n+4}{9n+7}$ est bien défini.
• Montrons que lorsque $n \in \mathbb{Z}$, les entiers $5n+4$ et $9n+7$ sont premiers entre eux : soit $d \in \mathbb{Z}$ un diviseur commun à $5n+4$ et $9n+7$ ; on a $d \mid 5n+4$ et $d \mid 9n+7$ donc $d \mid 9\times(5n+4)+(-5)\times(9n+7)$ [car l'ensemble des multiples de $d$ est stable par combinaisons linéaires à coefficients entiers], soit $d \mid 1$, ce qui prouve que $d \in \{-1;1\}$ et donc que $5n+4$ et $9n+7$ sont premiers entre eux.

**III** **a)** On a $(x+2)(2y-1) = 2xy+4y-x-2$.
**b)** Soient $x$ et $y$ dans $\mathbb{Z}$ ; $2xy+4y-x=7 \iff 2xy+4y-x-2=5$

$\iff (x+2)(2y-1)=5$ (voir question précédente)

$\iff x+2$ divise $5$ et $2y-1=\dfrac{5}{x+2}$

$\iff x+2 \in \{-5;-1;1;5\}$ et $2y = 1+\dfrac{5}{x+2} = \dfrac{x+7}{x+2}$

$\iff x \in \{-7;-3;-1;3\}$ et $y = \dfrac{x+7}{2x+4}$

$\iff (x,y) \in \{(-7,0);(-3,-2);(-1,3);(3,1)\}$

**IV** **Rappel :** si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, il existe un unique couple $(q,r)$ d'entiers tels que $0 \leqslant r < |b|$ et $a = bq+r$. Cette dernière égalité s'appelle l'identité de division euclidienne de $a$ par $b$ ; $r$ (resp. $q$) s'appelle le reste (resp. le quotient).

**1)a)** $\underbrace{100}_{a} = \underbrace{1000}_{b} \times \underbrace{0}_{q} + \underbrace{100}_{r}$ .

**b)** $\underbrace{-1000}_{a} = \underbrace{13}_{b} \times \underbrace{(-77)}_{q} + \underbrace{1}_{r}$ .

**c)** $\underbrace{203}_{a} = \underbrace{(-11)}_{b} \times \underbrace{(-18)}_{q} + \underbrace{5}_{r}$ .

**d)** $\underbrace{1001}_{a} = \underbrace{13}_{b} \times \underbrace{77}_{q} + \underbrace{0}_{r}$ .

**2)** On a $n^2+3n-1 = n^2+2n+n-1$, d'où $\underbrace{n^2+3n-1}_{a} = \underbrace{n}_{b} \times \underbrace{(n+2)}_{q} + \underbrace{n-1}_{r}$ (on a bien $q \in \mathbb{Z}$ et comme $n \geqslant 1$, $0 \leqslant \underbrace{n-1}_{r} < n$).

**V** **a)** • Le reste dans la division euclidienne de 323 par $b$ vaut 8 donc il existe $q_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $323 = b \times q_1 + 8$ (notons que le reste est forcément strictement inférieur à $b$ donc $b > 8$). On en déduit que $bq_1 = 315$, ce qui prouve que $b$ divise 315.
• Le reste dans la division euclidienne de 170 par $b$ vaut 5 donc il existe $q_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $170 = b \times q_2 + 5$, d'où $bq_2 = 165$, ce qui prouve que $b$ divise 165.

**b)** Comme $b$ divise 165 et 315, il divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de 165 et 315. En particulier $b$ divise $2 \times 165 + (-1) \times 315 = 15$.

**c)** $b$ étant un diviseur positif (par hypothèse, $b$ est naturel) de 15, il vaut 1, 3, 5 ou 15. On sait de plus que $b > 8$, donc $b$ ne peut valoir que 15. Réciproquement il est facile de vérifier que le reste dans la division euclidienne de 323 (resp. 170) par 15 vaut 8 (resp. 5).

**Bonus** Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(n) : 8 \mid 3 \times 9^n + 5$.

• **Initialisation :** si $n = 0$, on a $3 \times 9^0 + 5 = 3 + 5 = 8$, qui est bien divisible par 8 donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.
On a $8 \mid 3 \times 9^n + 5$ et comme $8 \mid 8$, 8 divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de $3 \times 9^n + 5$ et 8. En particulier, on a $8 \mid 9 \times (3 \times 9^n + 5) + (-5) \times 8$, soit $8 \mid 3 \times 9 \times 9^n + 45 - 40$, et finalement $8 \mid 3 \times 9^{n+1} + 5$, ce qui établit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.