**TS (Spécialité)**

**Correction des exercices n°5 et 6 (partie 3) p 73**

**5** **a)** • Si $n \equiv 0\ [2]$, on a $n^{13} - n \equiv 0^{13} - 0\ [2]$, soit $n^{13} - n \equiv 0\ [2]$.
Si $n \equiv 1\ [2]$, on a $n^{13} - n \equiv 1^{13} - 1\ [2]$, soit $n^{13} - n \equiv 0\ [2]$.
Dans tous les cas, $n^{13} - n$ est divisible par 2.
• Si $n \equiv 0\ [3]$, on a $n^{13} - n \equiv 0^{13} - 0\ [3]$, soit $n^{13} - n \equiv 0\ [3]$.
Si $n \equiv 1\ [3]$, on a $n^{13} - n \equiv 1^{13} - 1\ [3]$, soit $n^{13} - n \equiv 0\ [3]$.
Si $n \equiv 2\ [3]$, on a $n \equiv -1\ [3]$ (car $-1 \equiv 2\ [3]$) donc $n^{13} - n \equiv (-1)^{13} - (-1)\ [3]$, soit $n^{13} - n \equiv 0\ [3]$.
Dans tous les cas, $n^{13} - n$ est divisible par 3.
• Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, on en déduit que $n^{13} - n$ est divisible par $2 \times 3 = 6$.

**b)** • Comme 13 est premier, le petit théorème de Fermat montre que $n^{13} - n$ est divisible par 13.
• On a $n^{13} - n = n(n^{12} - 1) = n\left(\left(n^6\right)^2 - 1\right) = n(n^6 - 1)(n^6 + 1) = (n^7 - n)(n^6 + 1)$. Comme 7 est premier, le petit théorème de Fermat montre que $n^7 - n$ est divisible par 7, ce qui prouve que 7 divise aussi $(n^7 - n)(n^6 + 1) = n^{13} - n$.
**c)** Comme 6, 7 et 13 sont premiers entre eux deux à deux, on déduit des deux questions précédentes que $n^{13} - n$ est divisible par $6 \times 7 \times 13 = 546$.

**6** **a)** Comme $p$ est premier, le petit théorème de Fermat montre que $p \mid 2^p - 2$.
**b)** • Soit $p$ un entier premier divisant $2^p + 5$ ; d'après la question précédente, $p$ divise alors la combinaison linéaire à coefficient entiers : $1 \times (2p + 5) + (-1) \times (2p - 2)$, d'où $p \mid 7$, ce qui prouve que $p = 7$.
• Réciproquement si $p = 7$, $p$ divise $2^p + 5$ (en effet, $2^7 + 5 = 133 = 7 \times 19$).