Correction de l'exercice n° 19 p 143

1) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1} = -0{,}1\, u_n + 0{,}8\, v_n \\ \text{et} \\ v_{n+1} = -0{,}4\, u_n + 1{,}1\, v_n \end{cases}$, ce qui équivaut

à $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1 & 0{,}8 \\ -0{,}4 & 1{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, ou encore à $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} -0{,}1 & 0{,}8 \\ -0{,}4 & 1{,}1 \end{pmatrix}$.

2) a) La calculatrice permet de vérifier que $PDP^{-1} = A$, où $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

2) b) - Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition :

$$\mathcal{P}(n) : \quad A^n = P D^n P^{-1}$$

- On a $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$; on a $A^n = PD^nP^{-1}$

donc $A^{n+1} = A \times A^n = PDP^{-1}\, PD^nP^{-1} = PDI_3D^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$,

ce qui prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^nX_0$,

soit $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.

3) D étant une matrice diagonale, on a $D^n = \begin{pmatrix} 0{,}3^n & 0 \\ 0 & 0{,}7^n \end{pmatrix}$ donc

$$PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}3^n & 0 \\ 0 & 0{,}7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}3^n & -0{,}3^n \\ -0{,}7^n & 2 \times 0{,}7^n \end{pmatrix},$$ d'où

$$PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \times 0{,}3^n - 0{,}7^n & -2 \times 0{,}3^n + 2 \times 0{,}7^n \\ 0{,}3^n - 0{,}7^n & -0{,}3^n + 2 \times 0{,}7^n \end{pmatrix}$$ et comme $X_n = PD^nP^{-1}X_0$,

on obtient $X_n = \begin{pmatrix} 2 \times 0{,}3^n - 0{,}7^n & -2 \times 0{,}3^n + 2 \times 0{,}7^n \\ 0{,}3^n - 0{,}7^n & -0{,}3^n + 2 \times 0{,}7^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, soit :

$u_n = 5 \times (2 \times 0{,}3^n - 0{,}7^n) + 6 \times (-2 \times 0{,}3^n + 2 \times 0{,}7^n) = -2 \times 0{,}3^n + 7 \times 0{,}7^n$ et

$v_n = 5 \times (0{,}3^n - 0{,}7^n) + 6\,(-0{,}3^n + 2 \times 0{,}7^n) = -0{,}3^n + 7 \times 0{,}7^n$.

Comme $0{,}3$ et $0{,}7$ sont dans $]-1, 1[$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}3^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}7^n = 0$

donc par produit et somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.