Correction de l'exercice n°15^{c,e,f} du polycopié sur la divisibilité

c) On a $(n+1)^2 = n^2+2n+1$, soit $\underbrace{(n+1)^2}_{a} = \underbrace{(n+2)}_{b} \times \underbrace{n}_{q} + \underbrace{1}_{r}$, avec $0 \leqslant \underbrace{1}_{r} < \underbrace{n+2}_{b}$ (en effet, on a $n \geqslant 4$ donc $n+2 \geqslant 6$, d'où $n+2>1$).
Bilan : le quotient vaut n et le reste vaut 1.

e) ***Brouillon :*** *en tâtonnant, on s'aperçoit que* $(n+3)\times q$ *semble dépasser* n^2+n *lorsque* $q=n$ *et* $q=n-1$ *(*n^2+3n *dans le premier cas et* n^2+2n-3 *dans le second). Lorsque* $q=n-2$*, on obtient* $(n+3)\times q = n^2+n-6$*, ce qui semble convenir.*

$\hookrightarrow$ On a $\underbrace{n^2+n}_{a} = \underbrace{(n+3)}_{b} \times \underbrace{(n-2)}_{q} + \underbrace{6}_{r}$, avec $0 \leqslant \underbrace{6}_{r} < \underbrace{n+3}_{b}$ (en effet, on a $n \geqslant 4$ donc $n+3 \geqslant 7$, soit $n+3>6$).
Bilan : le quotient vaut $n-2$ et le reste vaut 6.

f) On a $n^2-2 = n^2-n+n-2$, soit $\underbrace{n^2-2}_{a} = \underbrace{(n-1)}_{b} \times \underbrace{n}_{q} + \underbrace{n-2}_{r}$, avec $0 \leqslant \underbrace{n-2}_{r} < \underbrace{n-1}_{b}$ (en effet, d'une part $n \geqslant 4$ donc $n-2 \geqslant 2 \geqslant 0$ et d'autre part $-2 < -1$ donc $n-2 < n-1$).
Bilan : le quotient vaut n et le reste vaut $n-2$.

Exercice supplémentaire corrigé :

Soit $n \in \mathbb{N}$; écrire l'identité de division euclidienne de n^2+3n-4 par $n+5$.

Solution :

Brouillon : *en tâtonnant, on constate que* $(n+5)\times q$ *semble dépasser* n^2+3n-4 *lorsque* $q=n$ *et* $q=n-1$ *(*n^2+5n *dans le premier cas et* n^2+4n-5 *dans le second). Lorsque* $q=n-2$*, on obtient* $(n+5)\times q = n^2+3n-10$*, ce qui semble convenir.*

$\hookrightarrow$ • Premier cas : $n \geqslant 2$.

On a $\underbrace{n^2+3n-4}_{a} = \underbrace{(n+5)}_{b} \times \underbrace{(n-2)}_{q} + \underbrace{6}_{r}$, avec $0 \leqslant \underbrace{6}_{r} < \underbrace{n+5}_{b}$ (en effet, on a $n \geqslant 2$ donc $n+5 \geqslant 7$, soit $n+5>6$).
Bilan : le quotient vaut $n-2$ et le reste vaut 6.

• Second cas : $n<2$.

− Lorsque $n=0$, $n^2+3n-4=-4$ et $n+5=5$: $\underbrace{-4}_{a} = \underbrace{5}_{b} \times \underbrace{(-1)}_{q} + \underbrace{1}_{r}$.

− Lorsque $n=1$, $n^2+3n-4=0$ et $n+5=6$: $\underbrace{0}_{a} = \underbrace{6}_{b} \times \underbrace{0}_{q} + \underbrace{0}_{r}$.