Montrer que l'entier $A = 2^{(3^{2015})} + 3^{(3^{2015})}$ possède au moins 2016 facteurs premiers distincts.

Corrigé

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $u_n = 2^{3^n} + 3^{3^n}$. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition : $\mathcal{P}(n)$: u_n possède au moins $n+1$ facteurs premiers distincts.

• On a $u_1 = 2^3 + 3^3 = 35$, qui possède 2 facteurs premiers distincts, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$;
On a $u_{n+1} = 2^{3^{n+1}} + 3^{3^{n+1}} = \left(2^{3^n}\right)^3 + \left(2^{3^n}\right)^3$. Posons $X = 2^{3^n}$ et $Y = 3^{3^n}$;
On a $u_{n+1} = X^3 + Y^3 = (X+Y)(X^2 - XY + Y^2) = u_n(X^2 - XY + Y^2)$. Ainsi u_n divise u_{n+1}, donc tous les facteurs premiers de u_n sont aussi des facteurs premiers de u_{n+1}, ce qui, en vertu de l'hypothèse de récurrence, prouve que u_{n+1} possède au moins $n+1$ facteurs premiers distincts.
Soit p un facteur premier de $X^2 - XY + Y^2$ (il en existe au moins un car $X^2 - XY + Y^2 = (X-Y)^2 + XY > 1$). Raisonnons par l'absurde en supposant que p divise u_n :
$p \,|\, X + Y$ et $p \,|\, X^2 - XY + Y^2 = (X+Y)^2 - 3XY$ donc $p \,|\, 3XY = 2^{3^n} \times 3^{1+3^n}$, ce qui prouve que $p \in \{2; 3\}$, par unicité de la décomposition d'un entier > 1 en produit de facteurs premiers. On obtient une contradiction car ni 2, ni 3 ne peut diviser $u_n = 2^{3^n} + 3^{3^n}$ (cela impliquerait que 2 divise 3^{3^n} ou que 3 divise 2^{3^n}).
Bilan : p est un facteur premier de u_{n+1} ne divisant pas u_n. Cela démontre que u_{n+1} possède au moins $(n+1)+1 = n+2$ facteurs premiers différents et prouve donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

En particulier $\mathcal{P}(2015)$ est vraie, ce qui résout la question.