Corrigé du contrôle 2

Exercice 1 :

Déterminer le reste de la division Euclidienne de a par b dans chaque cas :

1. $a = 8^{2\,015}$ et $b = 3$.
   $8 \equiv 2\,(3)$ donc $8^{2\,015} \equiv 2^{2\,015}\,(3)$.
   De plus $2^2 = 4$ donc $2^2 \equiv 1\,(3)$.
   Or $2\,015 = 2 \times 1\,007 + 1$ donc $2^{2\,015} = (2^2)^{1\,007} \times 2$.
   On obtient donc $2^{2\,015} \equiv 1^{1\,007} \times 2\,(3) \equiv 2\,(3)$.
   Ainsi $8^{2\,015} \equiv 2\,(3)$ donc le reste de la division euclidienne de $8^{2\,015}$ par 3 est 2.
2. $a = 1\,789^{1\,515}$ et $b = 7$.
   $1\,789 = 7 \times 255 + 4$ donc $1\,789 \equiv 4\,(7)$ donc $1\,789^{1\,515} \equiv 4^{1\,515}\,(7)$.
   De plus $4^3 = 64 = 9 \times 7 + 1$ donc $4^3 \equiv 1\,(7)$.
   Or $1\,515 = 3 \times 505$ donc $4^{1\,515} = (4^3)^{505}$.
   On obtient donc $4^{1\,515} \equiv 1^{505}\,(3) \equiv 1\,(3)$.
   Ainsi $1\,789^{1\,515} \equiv 1\,(3)$ donc le reste de la division euclidienne de $1\,789^{1\,515}$ par 7 est 1.

Exercice 2 :

Montrer que pour tout entier naturel n impair, $3^n + 5^n$ est divisible par 4.
Soit $n \in \mathbb{N}$, n impair.
$3 \equiv -1\,(4)$ donc $3^n \equiv (-1)^n\,(4)$. Or n est impair donc $(-1)^n = -1$ et donc $3^n \equiv -1\,(4)$.
$5 \equiv 1\,(4)$ donc $5^n \equiv 1^n\,(4)$ et donc $5^n \equiv 1\,(4)$.
On en déduit que $3^n + 5^n \equiv 0\,(4)$ donc que $3^n + 5^n$ est divisible par 4 pour tout entier naturel n impair.
Remarque : Si n est pair, le reste de la division euclidienne de $3^n + 5^n$ par 4 est 2.

Exercice 3 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :
   a) Si $n \equiv 0\,(3)$ alors $5^n \equiv 1\,(31)$.
      On suppose que $n \equiv 0\,(3)$ donc qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3m$.
      On a alors $5^n = (5^3)^m = 125^m$.
      Or $125 = 4 \times 31 + 1$ donc $125 \equiv 1\,(31)$.
      On en déduit que $5^n \equiv 1^m\,(31) \equiv 1\,(31)$.
   b) Si $n \equiv 1\,(3)$ alors $5^n \equiv 5\,(31)$.
      On suppose que $n \equiv 1\,(3)$ donc qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3m + 1$.
      On a alors $5^n = 125^m \times 5$ et donc $5^n \equiv 5\,(3)$.
   c) Si $n \equiv 2\,(3)$ alors $5^n \equiv 25\,(31)$.
      On suppose que $n \equiv 2\,(3)$ donc qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3m + 2$.
      On a alors $5^n = 125^m \times 5^2 = 125^m \times 25$ et donc $5^n \equiv 25\,(3)$.

2. Déterminer le reste de la division Euclidienne de 5^{227} par 31.
   Il s'agit de déterminer le reste de la division euclidienne de 227 par 3.
   Or $227 = 3 \times 75 + 2$ donc $227 \equiv 2\,(3)$ et d'après la question précédente, on a $5^{227} \equiv 25\,(31)$.
   Le reste de la division euclidienne de 5^{227} par 31 est donc 25.

3. Déterminer le reste de la division Euclidienne de $5^{8^{2\,015}}$ par 31.

   D'après un résultat de l'exercice 1, $8^{2\,015} \equiv 2\,(3)$ donc $5^{8^{2\,015}} \equiv 25\,(31)$.

   Le reste de la division Euclidienne de $5^{8^{2\,015}}$ par 31 est donc 25.

<u>Exercice 4 :</u>

1. x désigne un entier relatif. Compléter le tableau suivant :

Reste de la division Euclidienne de x par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division Euclidienne de $3x$ par 5	0	3	1	4	2

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $3x \equiv 2\,(5)$.
   On en déduit que $3x \equiv 2\,(5) \Leftrightarrow x \equiv 4\,(5)$.
   L'ensemble des solutions de l'équation $3x \equiv 2\,(5)$ est donc l'ensemble des entiers relatifs de la forme $x = 4 + 5k$ où $k \in \mathbb{Z}$.
3. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que $3(x+1)$ soit divisible par 5.

$$\begin{aligned}
3(x+1)\,\text{est divisible par}\,5 &\Leftrightarrow 3(x+1) \equiv 0\,(5) \\
&\Leftrightarrow 3x + 3 \equiv 0\,(5) \\
&\Leftrightarrow 3x \equiv -3\,(5) \\
&\Leftrightarrow 3x \equiv 2\,(5) \quad (\text{car } -3 \equiv 2\,(5)) \\
&\Leftrightarrow x\,\text{est solution de l'équation}\,3x \equiv 2\,(5)
\end{aligned}$$

   Ainsi l'ensemble des entiers relatifs x tels que $3(x+1)$ soit divisible par 5 est l'ensemble des entiers relatifs de la forme $x = 4 + 5k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

<u>Exercice 5 :</u>

n désigne un entier relatif.

1. Montrer que $3n \equiv 5\,(11) \Leftrightarrow n \equiv 9\,(11)$.

   - Supposons que $n \equiv 9\,(11)$.
     On a alors $3n \equiv 3 \times 9\,(11)$.
     Or $3 \times 9 = 27 = 11 \times 2 + 5$ donc $3n \equiv 5\,(11)$.
   - Réciproquement, supposons que $3n \equiv 5\,(11)$.
     Il s'agit de trouver un entier relatif k tel que $3k \equiv 1\,(11)$. (un inverse de 3 « modulo 11 »)
     Or $3 \times 4 = 12 = 11 + 1$ donc $3 \times 4 \equiv 1\,(11)$.
     On a donc $4 \times 3n \equiv 4 \times 5\,(11)$ et comme $4 \times 5 = 20 \equiv 9\,(11)$, on obtient $n \equiv 9\,(11)$.

   On a bien montré que $3n \equiv 5\,(11) \Leftrightarrow n \equiv 9\,(11)$.

2. En déduire l'ensemble des entiers relatifs tels que 11 divise $25n+6$.

   11 divise $25n+6 \Leftrightarrow 25n+6 \equiv 0\,(6) \Leftrightarrow 25n \equiv -6\,(11)$.
   Or $-6 \equiv 5\,(11)$ et $25 \equiv 3\,(11)$.
   On a donc 11 divise $25n+6 \Leftrightarrow 3n \equiv 5\,(11) \Leftrightarrow n \equiv 9\,(11)$.
   L'ensemble des entiers relatifs n tels que 11 divise $25n+6$ est donc l'ensemble des entiers relatifs de la forme $n = 9 + 11k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6 : $\boxed{\textbf{BONUS}}$

Si x est un entier naturel, on note $s(x)$ la somme des chiffres de l'écriture décimale de x.
Par exemple, $s(7\,089) = 7+0+8+9 = 24$ et $s(560) = 5+6+0 = 11$.

Soit $\mathrm{A} = 2\,015^{2\,015}$. Calculer $s(s(s(\mathrm{A})))$.
Il faut se souvenir de la démonstration du critère de divisibilité par 9.
Plus précisément, soit x un nombre entier naturel dont l'écriture décimale est

$$x = a_0 + a_1 \times 10 + \ldots + a_n \times 10^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \times 10^k$$

On a $10 \equiv 1\,(9)$ donc pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $10^k \equiv 1^k\,(9) \equiv 1\,(9)$.
On en déduit que $x \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k\,(9) \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_n\,(9)$.
Autrement dit, on a $s(x) \equiv x\,(9)$.

$2\,015 \equiv 2+1+5\,(9) \equiv -1\,(9)$ donc $\mathrm{A} \equiv (-1)^{2\,015}\,(10) \equiv -1\,(9) \equiv 8\,(9)$.
On a donc $s(\mathrm{A}) \equiv 8\,(9)$ et donc $s(s(s(\mathrm{A}))) \equiv 8\,(9)$.
Il reste à démontrer que $s(s(s(\mathrm{A})))$ est effectivement égal à 8.

Pour cela remarquons que $\mathrm{A} \leq \left(10^4\right)^{2\,015} \Leftrightarrow \mathrm{A} \leq 10^{8\,060}$.
On en déduit que $s(\mathrm{A}) \leq 9 \times 8\,060$ c'est-à-dire $s(\mathrm{A}) \leq 72\,540$.
On a donc $s(s(\mathrm{A})) \leq 9 \times 5 \Leftrightarrow s(s(\mathrm{A})) \leq 45$.
Finalement, $s(s(s(\mathrm{A}))) \leq 3 + 9 \Leftrightarrow s(s(s(\mathrm{A}))) \leq 12$.

Conclusion : $s(s(s(\mathrm{A}))) \equiv 8\,(9)$ et $0 \leq s(s(s(\mathrm{A}))) \leq 12$ donc $s(s(s(\mathrm{A}))) = 8$.