Spé maths, TS

Arithmétique : autour de la notion de divisibilité

Indications pour résoudre les exercices 3.d. et 3.f.

$\boxed{\mathbf{3}}$ d) Il faut transformer n^3+1 en lui ajoutant une expression A judicieuse et en la retirant : $n^3+1 = n^3+A-A+1$ donc $n^3+1 = n^3+A-(A-1)$. Il faut se débrouiller pour choisir A de telle façon que n^3+A et $A-1$ soient divisibles par $n+1$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ f) Il faut transformer n^4+n^2+1 en lui ajoutant une expression B judicieuse et en la retirant :
$n^4+n^2+1 = n^4+B+n^2+1-B$. Il faut se débrouiller pour choisir B de telle façon que l'expression de droite soit factorisable.

Voici un exercice fondé sur le même principe :

Exercice résolu : soit $n \in \mathbb{Z}$; montrer que $n+2$ divise n^5+32.

Solution : On a $n^5+32 = n^5 + \underbrace{2n^4 - 2n^4}_{\text{se compensent}} + 32$. J'ai choisi $2n^4$ car le début de l'expression obtenue est divisible par $n+2$: en effet $n^5+2n^4 = n^4(n+2)$.
Ainsi $n^5+32 = n^4(n+2) - 2(n^4-16)$
$= n^4(n+2) - 2[(n^2)^2 - 4^2]$
$= n^4(n+2) - 2(\underbrace{n^2-4}_{n^2-2^2})(n^2+4)$
$= n^4(n+2) - 2(n-2)(n+2)(n^2+4)$
$= (n+2)[n^4 - 2(n-2)(n^2+4)]$
$= K(n+2)$ avec $K = n^4 - 2(n-2)(n^2+4) \in \mathbb{Z}$, on a donc bien $n+2 \mid n^5+32$.