Partie A

1. D'après l'énoncé, on peut dire que, pour tout n : $\begin{cases} a_{n+1} = 20\% \text{ de } a_n + 10\% \text{ de } b_n \\ b_{n+1} = 60\% \text{ de } a_n + 30\% \text{ de } b_n \end{cases}$

   soit $\begin{cases} a_{n+1} = 0,2\,a_n + 0,1\,b_n \\ b_{n+1} = 0,6\,a_n + 0,3\,b_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

   $\iff U_{n+1} = M \times U_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$.

2. $U_1 = M \times U_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 50 + 0,1 \times 60 \\ 0,6 \times 50 + 0,3 \times 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix}$

   $U_2 = M \times U_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \times 16 + 0,1 \times 48 \\ 0,6 \times 16 + 0,3 \times 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix}$

3. À l'aide de la calculatrice, on trouve successivement :

   $U_3 = M \times U_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$, $U_4 = M \times U_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $U_5 = M \times U_4 = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 3 \end{pmatrix}$.

   C'est donc au bout de 5 heures qu'il ne reste qu'un seul vélo dans la station A.

4. • Initialisation : on a $\dfrac{1}{2^{1-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} = M = M^1$ donc la proposition est vrai au rang 1.

   • Hérédité : supposons la proposition vraie au rang $n \geqslant 1$; on a $M^n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$.

   Par conséquent, $M^{n+1} = M^n \times M = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$, soit

   $M^{n+1} = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 \times 0,2 + 0,1 \times 0,6 & 0,2 \times 0,1 + 0,1 \times 0,3 \\ 0,6 \times 0,2 + 0,3 \times 0,6 & 0,6 \times 0,1 + 0,3 \times 0,3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,1 & 0,05 \\ 0,3 & 0,15 \end{pmatrix}$,

   d'où $M^{n+1} = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times 0,2 & \frac{1}{2} \times 0,1 \\ \frac{1}{2} \times 0,6 & \frac{1}{2} \times 0,3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^{n-1}} \times \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^{(n+1)-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$,

   ce qui prouve que la proposition est vraie au rang $n+1$.

Partie B

1. (a) $V = M \times V + R \iff V - M \times V = R \iff I \times V - M \times V = R \iff (I - M) \times V = R \iff N \times V = R$.

   (b) $N \times V = R \iff \underbrace{N^{-1} \times N}_{I_2} \times V = N^{-1} \times R \iff V = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$

   $\iff V = \begin{pmatrix} 1,4 \times 30 + 0,2 \times 10 \\ 1,2 \times 30 + 1,6 \times 10 \end{pmatrix} \iff V = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$.

2. (a) $W_{n+1} = V_{n+1} - V$; or $V_{n+1} = M \times V_n + R$ et $V = M \times V + R$ donc, pour tout entier n,

   $W_{n+1} = M \times V_n + R - (M \times V + R) = M \times V_n + R - M \times V - R = M \times (V_n - V) = M \times W_n$

   (b) $W_0 = V_0 - V = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

Pour tout n, $W_n = M^n \times W_0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $M^n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$, donc pour tout $n \geqslant 1$, $W_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 \times 6 + 0,1 \times 8 \\ 0,6 \times 6 + 0,3 \times 8 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Comme $W_n = V_n - V$, on a $V_n = W_n + V$. D'où pour $n \geqslant 1, V_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$, soit $V_n = \begin{pmatrix} \frac{2}{2^{n-1}} + 44 \\ \frac{6}{2^{n-1}} + 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{2^n} + 44 \\ \frac{12}{2^n} + 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 0,5^n + 44 \\ 12 \times 0,5^n + 52 \end{pmatrix}$.

(c) D'après la question précédente, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\alpha_n = 4 \times 0,5^n + 44$ et $\beta_n = 12 \times 0,5^n + 52$ donc comme $0,5 \in]-1;1[$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$ et par produit et somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 4 \times 0 + 44 = 44$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = 12 \times 0 + 52 = 52$. Ainsi, au bout d'un temps très grand, le nombre de vélos va se stabiliser à 44 dans la station A et à 52 dans la station B.