Correction de l'exercice n°12 page 30

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $u_n > n^2$.

• **Initialisation :** on a $u_0 = 1$ et $0^2 = 0$ donc $u_0 > 0^2$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un certain entier n ; on a donc $u_n > n^2$. Alors (en ajoutant $2n+3$ de chaque côté de l'inégalité précédente) : $\underbrace{u_n + 2n + 3}_{u_{n+1}} > n^2+2n+3$, soit $u_{n+1} > n^2 + 2n + 3$ $(\star)$. Comme $3 > 1$, on a $n^2 + 2n + 3 > n^2 + 2n + 1$, ce qui prouve d'après $(\star)$ que $u_{n+1} > n^2 + 2n + 1$, soit $u_{n+1} > (n + 1)^2$. Ainsi, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Cela démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.

2) Calculons les premiers termes de la suite u pour conjecturer une expression de u_n en fonction de n :
$u_1 = u_{0+1} = u_0 + 2 \times 0 + 3 = 1 + 3 = 4$,
$u_2 = u_{1+1} = u_1 + 2 \times 1 + 3 = 4 + 2 + 3 = 9$,
$u_3 = u_{2+1} = u_2 + 2 \times 2 + 3 = 9 + 4 + 3 = 16$,
$u_4 = u_{3+1} = u_3 + 2 \times 3 + 3 = 16 + 6 + 3 = 25$.
Ainsi, $u_0 = 1^2$, $u_1 = 2^2$, $u_2 = 3^2$, $u_3 = 4^2$ et $u_4 = 5^2$. On peut conjecturer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = (n + 1)^2$: notons $\mathcal{R}(n)$ cette proposition.

Montrons par récurrence que la proposition $\mathcal{R}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation :** on a $u_0 = 1 = (0 + 1)^2$ donc $\mathcal{R}(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** supposons que $\mathcal{R}(n)$ soit vraie pour un certain entier n ; on a donc $u_n = (n+1)^2$. Comme $u_{n+1} = u_n+2n+3$, on a alors $u_{n+1} = (n+1)^2+2n+3$, soit $u_{n+1} = n^2+2n+1+2n+3$ et finalement $u_{n+1} = n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$. Ainsi $u_{n+1} = [(n + 1) + 1]^2$, ce qui prouve que $\mathcal{R}(n + 1)$ est vraie.

Cela démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n + 1)^2$.