Mobiliser quelques souvenirs de $1^{\text{ère}}$S concernant les suites...

Correction du devoir de rentrée

A On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = (n+0,3)^2 - n^2$.

1. On a $u_0 = (0+0,3)^2 - 0^2 = 0,09$;
   $u_1 = (1+0,3)^2 - 1^2 = 1,3^2 - 1 = 1,69 - 1 = 0,69$;
   $u_2 = (2+0,3)^2 - 2^2 = 2,3^2 - 4 = 5,29 - 4 = 1,29$ et
   $u_3 = (3+0,3)^2 - 3^2 = 3,3^2 - 9 = 11,89 - 9 = 1,89$.
   Notons (on aurait pu évidemment le remarquer dès le départ) que :
   $$u_n = (n^2 + 2 \times 0,3 \times n + 0,3^2) - n^2 = 0,6n + 0,09$$
   formule qui est beaucoup plus facilement exploitable. Par exemple :
   $$u_{1\,000\,000} = 0,6 \times 1\,000\,000 + 0,09 = 600\,000,09\ .$$
   [[**Attention** : avec la plupart des calculatrices, si vous avez utilisé, sans la simplifier, la formule $u_n = (n+0,3)^2 - n^2$ en remplaçant n par $1\,000\,000$, le résultat fourni est seulement une approximation : $\approx 600\,000,1$.]]
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n = 0,6n + 0,09$ et $u_{n+1} = 0,6(n+1) + 0,09$ donc :
   $u_{n+1} - u_n = 0,6(n+1) + 0,09 - (0,6n + 0,09)$, soit
   $u_{n+1} - u_n = 0,6n + 0,6 + 0,09 - 0,6n - 0,09$ ou encore $u_{n+1} - u_n = 0,6$, ce qui prouve que la suite (u_n) est arithmétique de raison $0,6$.
3. s est une somme de termes successifs de la suite arithmétique (u_n). On sait alors que :
   $$s = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} = (140 - 51 + 1) \times \frac{u_{51} + u_{140}}{2}$$
   Or $u_{51} = 0,6 \times 51 + 0,09 = 30,69$ et $u_{140} = 0,6 \times 140 + 0,09 = 84,09$ donc :
   $s = 90 \times \dfrac{30,69 + 84,09}{2} = 5165,1$.

B

1. On a $u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{2}$, donc :
   $u_2 = u_{1+1} = \dfrac{u_1 + 3}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2$,
   $u_3 = u_{2+1} = \dfrac{u_2 + 3}{2} = \dfrac{2+3}{2} = \dfrac{5}{2}$ et
   $u_4 = u_{3+1} = \dfrac{u_3 + 3}{2} = \dfrac{\frac{5}{2} + 3}{2} = \dfrac{\frac{11}{2}}{2} = \dfrac{11}{4}$.
2. • On a $u_2 - u_1 = 2 - 1$ et $u_3 - u_2 = \dfrac{5}{2} - 2 = \dfrac{1}{2}$. Comme $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$, la suite (u_n) ne peut pas être géométrique.
   • On a $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{2}{1} = 2$ et $\dfrac{u_3}{u_2} = \dfrac{\frac{5}{2}}{2} = \dfrac{5}{4}$. Comme $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_3}{u_2}$, la suite (u_n) ne peut pas être géométrique.

3. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $v_n = 3 - u_n$.

   (a) Si $n \geqslant 1$, on a $v_{n+1} = 3 - u_{n+1}$, soit $v_{n+1} = 3 - \dfrac{u_n+3}{2} = \dfrac{6-u_n-3}{2} = \dfrac{3-u_n}{2}$, d'où $v_{n+1} = \frac{1}{2} \times v_n$, ce qui prouve que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

   (b) On déduit de la question précédente que pour tout $n \geqslant 1$, on a $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} v_1$. Or $v_1 = 3 - u_1 = 3 - 1 = 2$ donc $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times 2 = \frac{1}{2^{n-1}} \times 2 = \frac{1}{2^{n-2}}$.

   (c) • s' est une somme de termes successifs de la suite géométrique (v_n). On sait que :
$$s' = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$
   donc $s' = v_1 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \dfrac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 4\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 4 - \frac{1}{2^{n-2}}$.

   • Notons que $v_n = 3 - u_n$ entraîne que $u_n = 3 - v_n$.

   On a donc $s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (3 - v_1) + (3 - v_2) + \cdots + (3 - v_n) = \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{n \text{ fois}} - (v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = 3n - s' = 3n - \left(4 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) = 3n - 4 + \frac{1}{2^{n-2}}$

$\boxed{\text{C}}$ On a, pour $n \geqslant 1$, $\quad u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

1. $u_1 = \dfrac{1}{1^2+1} = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{2}{2^2+1} = \dfrac{2}{5}$ et $u_3 = \dfrac{3}{3^2+1} = \dfrac{3}{10}$.

2. En utilisant par exemple la calculatrice, on obtient les valeurs (arrondies) suivantes :

n	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
u_n	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001

   Il semble donc que le terme u_n se rapproche de plus en plus de zéro à mesure que son rang n grandit.

3. • Soit $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1}{(n+1)^2+1} - \dfrac{n}{n^2+1} = \dfrac{n+1}{n^2+2n+2} - \dfrac{n}{n^2+1}$,

   d'où : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n^2+1)(n+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} - \dfrac{n(n^2+2n+2)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$,

   soit : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n^3+n^2+n+1-(n^3+2n^2+2n)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} = \dfrac{-n^2-n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$.

   • On a $n^2+1 > 0$ et $n^2+2n+2 = (n+1)^2+1 > 0$ donc d'après la formule précédente, $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $-n^2 - n + 1$.

   Or $-n^2 - n + 1 = -(\underbrace{n^2}_{\oplus} + \underbrace{n-1}_{\oplus})$ et vu que $n \geqslant 1$, on a $n - 1 \geqslant 0$. Comme $n^2 \geqslant 0$, on en déduit finalement que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et donc que la suite (u_n) est décroissante.

4. Il suffit de choisir $N_1 = 10$.

   En effet $u_{10} = \dfrac{10}{10^2+1} = \dfrac{10}{101}$, d'où$^{(\star)}$ $u_{10} < \dfrac{10}{100} = 10^{-1}$. Comme la suite (u_n) est décroissante, dès que $n \geqslant \underbrace{10}_{N_1}$, on a $u_n \leqslant u_{10}$ d'où $u_n < 10^{-1}$.

5. Il suffit cette fois de choisir $N_2 = 100$.
   En effet $u_{100} = \dfrac{100}{100^2+1} = \dfrac{100}{10001}$, d'où$^{(\star)}$ $u_{100} < \dfrac{100}{10000} = 10^{-2}$. Comme la suite (u_n) est décroissante, dès que $n \geqslant \underbrace{100}_{N_2}$, on a $u_n \leqslant u_{100}$ d'où $u_n < 10^{-2}$.
6. Plus généralement, il suffit de prendre $N = 10^k$.
   En effet $u_{10^k} = \dfrac{10^k}{(10^k)^2+1} = \dfrac{10^k}{10^{2k}+1}$, d'où$^{(\star)}$ $u_{10^k} < \dfrac{10^k}{10^{2k}} = 10^{k-2k} = 10^{-k}$. Comme la suite (u_n) est décroissante, dès que $n \geqslant \underbrace{10^k}_{N}$, on a $u_n \leqslant u_{10^k}$ d'où $u_n < 10^{-k}$.

$(\star)$ C'est en utilisant la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ qu'on peut prouver que si a, b et c sont trois réels strictement positifs tels que $c > b$, alors $\frac{a}{c} < \frac{a}{b}$.