Mobiliser quelques souvenirs de 1$^{\text{ère}}$S concernant les suites...

À rendre jeudi 17 septembre 2015

Un résumé du cours de 1$^{\text{ère}}$S sur les suites est en ligne sur le blog (http ://blog.crdp-versailles.fr/algomaths)

$\boxed{\text{A}}$ On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = (n + 0,3)^2 - n^2$.

1. Calculez u_0, u_1, u_2 et u_3. Calculez également $u_{1\,000\,000}$.
2. Prouvez que (u_n) est une suite arithmétique dont vous préciserez la raison.
3. Calculez $s = \displaystyle\sum_{k=51}^{140} u_k$ (c'est-à-dire : $s = u_{51} + u_{52} + \cdots + u_{139} + u_{140}$).

$\boxed{\text{B}}$ Soit la suite (u_n) définie, pour $n \geqslant 1$, par : $\quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{2}$.

1. Calculez u_2, u_3 et u_4.
2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifiez vos réponses.
3. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $v_n = 3 - u_n$.
   (a) Démontrez que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   (b) Exprimez v_n puis u_n en fonction de n.
   (c) Exprimez en fonction de $n \geqslant 1$: $s' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$ puis $s = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$
   (c'est-à-dire $s' = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ et $s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$).

$\boxed{\text{C}}$ Soit (u_n) la suite définie, pour $n \geqslant 1$, par $u_n = \dfrac{n}{n^2 + 1}$.

1. Calculez u_1, u_2 et u_3.
2. Grâce à un outil informatique, évaluez vers quelle valeur semble se rapprocher de plus en plus le terme u_n lorsque son rang n devient très grand.
3. Montrez que pour $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-n^2 - n + 1}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)}$. Déduisez-en que la suite (u_n) est décroissante.
4. Prouvez qu'il existe un entier $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que : dès que $n \geqslant N_1$, alors $u_n < 10^{-1}$.
5. Prouvez qu'il existe un entier $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que : dès que $n \geqslant N_2$, alors $u_n < 10^{-2}$.
6. Plus généralement, si k est un entier strictement positif, établissez qu'il existe un entier N tel que : dès que $n \geqslant N$, alors $u_n < 10^{-k}$.