

0) Rappels de première

A - Généralités

Définition : Une suite numérique u est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} . C'est-à-dire qu'à chaque entier naturel n , on fait correspondre un réel noté u_n (appelé terme de rang n de la suite u).

Exemples : 1) On peut définir une suite grâce au mode *explicite*, c'est-à-dire exprimer le terme général de rang n directement en fonction de n .

ex : la suite u définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$. On a $u_0 = \frac{1}{0+1} = 1$, $u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$ etc.

2) On peut également utiliser le mode *implicite* pour définir une suite.

Dans ce cas une relation (appelée *relation de récurrence*) permet de calculer chaque terme en fonction du précédent à condition de connaître le terme initial.

ex : la suite u définie par son terme initial $u_0 = -1$ et la relation : $u_{n+1} = 2u_n - n$ (\clubsuit).

Dans ce cas les termes u_1, u_2, u_3 (etc.) se calculent en remplaçant successivement n par 0, 1, 2 (etc.) dans la relation (\clubsuit) :

$$u_{0+1} = 2u_0 - 0 = 2 \times (-1) - 0 = -2 \Rightarrow u_1 = -2,$$

$$u_{1+1} = 2u_1 - 1 = 2 \times (-2) - 1 = -5 \Rightarrow u_2 = -5,$$

$$u_{2+1} = 2u_2 - 2 = 2 \times (-5) - 2 = -12 \Rightarrow u_3 = -12 \text{ (etc.)}$$

Remarque : Il arrive que u_n soit défini seulement à partir d'un certain rang n_0 . On dit que n_0 est le rang initial de la suite (u_n).

B - Monotonie des suites

Définition : Une suite numérique u est dite croissante (resp. décroissante) lorsque pour tout entier n , on a $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$).

Dans un cas comme dans l'autre, on parle de suite *monotone*.

Remarques : 1) En pratique, pour montrer que la suite u est croissante ou décroissante, on est souvent amené à étudier le signe de la différence : $u_{n+1} - u_n$.

2) Certains cas particuliers dans lesquels le terme général de la suite est toujours strictement positif peuvent se traiter en étudiant le rapport de u_{n+1} sur u_n :

Si pour tout n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors u est croissante. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors u est décroissante.

3) Si les symboles d'inégalités sont stricts, on parle de stricte (dé)croissance.

4) Attention une suite peut n'être ni croissante, ni décroissante. C'est le cas de la suite u définie par $u_n = (-1)^n$ qui prend alternativement les valeurs 1 et -1.

Exemples : 1) Montrons que la suite u définie par son terme initial $u_1 = 2$ et la relation :

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n + n + 2 \text{ est croissante :}$$

Soit $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + n + 2$. Comme $n \in \mathbb{N}$, on a $n \geq 0$. De plus $u_n^2 \geq 0$ (carré),

donc $u_{n+1} - u_n \geq 2 > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$: u est une suite strictement croissante.

2) Montrons que la suite v définie pour $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \frac{2}{5^n}$ est strictement décroissante :

Comme v est à termes strictement positifs, on peut appliquer la remarque 2) précédente :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2/5^{n+1}}{2/5^n} = \frac{2 \times 5^n}{2 \times 5^{n+1}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} < 1 : \text{la suite } v \text{ est strictement décroissante.}$$

C - Suites arithmétiques

Définition : La suite u est dite arithmétique de raison r lorsque :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \boxed{u_{n+1} = u_n + r}.$$

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

Exemples : 1) La suite des entiers impairs est arithmétique de raison 2.

2) Une suite arithmétique de raison nulle est une suite constante.

Propriétés : Soit u une suite arithmétique de raison r .

$$- \text{ Si } n \in \mathbb{N}, \boxed{u_n = u_0 + n \times r}$$

$$- \text{ Si } n \in \mathbb{N}, \text{ et } p \in \mathbb{N} \text{ sont tels que } p \leq n, \text{ on a : } \boxed{u_n = u_p + (n - p) \times r}$$

Propriété : Somme des premiers termes

Si u est une suite arithmétique de raison r , on a : $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$.

On peut retenir plus généralement pour une suite arithmétique :

$$\text{Somme des termes} = \left(\begin{array}{c} \text{nombre de} \\ \text{termes} \end{array} \right) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Exemple : $\boxed{1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$

Remarques : 1) Pour montrer qu'une suite u est arithmétique de raison r , il faut prouver que $(u_{n+1} - u_n)$ est une suite constante (égale à r).

Exemple : Montrons que la suite u définie par $u_n = \frac{3n}{2} - 7$ est arithmétique :

$$\text{On a } u_{n+1} - u_n = \left(\frac{3(n+1)}{2} - 7 \right) - \left(\frac{3n}{2} - 7 \right) = \frac{3}{2}. \text{ Donc } u \text{ est arithmétique de raison } 1,5.$$

2) Lorsque sa raison est strictement positive (resp. négative), une suite arithmétique est strictement croissante (resp. décroissante).

E - Suites géométriques

Définition : La suite u est dite géométrique de raison $q \neq 0$ lorsque :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \boxed{u_{n+1} = q \times u_n}$$

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$$

Exemples : 1) La suite des puissances de 10 est géométrique de raison 10.

2) Une suite géométrique de raison 1 est une suite constante.

3) Montrons que la suite u définie par $u_n = \frac{-3}{2^n}$ est géométrique :

$$\text{On a } u_{n+1} = \frac{-3}{2^{n+1}} = \frac{-3}{2 \times 2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{-3}{2^n} \Rightarrow u_{n+1} = 0,5 \times u_n.$$

Donc (Cf définition) u est géométrique de raison 0,5.

Propriétés : Soit u une suite géométrique de raison q .

- Si $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n \times u_0$

- Si $n \in \mathbb{N}$, et $p \in \mathbb{N}$ sont tels que $p \leq n$, on a : $u_n = q^{n-p} \times u_p$

Propriété : *Somme des premiers termes*

Si u est une suite géométrique de raison $q \neq 1$, on a : $\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

On peut retenir plus généralement pour une suite géométrique de raison distincte de 1 :

$$\text{Somme des termes} = \text{1er terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

Exemple : si $q \neq 1$, $1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$