TS2 - Devoir de Mathématiques à rendre lundi 12 octobre 2015

Avant de chercher ce devoir, il est conseillé, si vous ne l'avez jamais utilisé, de s'initier au logiciel Algobox. Un lien sur le mathblog (situé dans la colonne de droite) permet de le faire.

I Expliquer précisément quelle est l'utilité de chaque algorithme.

a)

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE u
  LIRE n
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    u PREND_LA_VALEUR 3*u/(1+u)
    FIN_POUR
  AFFICHER u
FIN_ALGORITHME
```

b)

```
VARIABLES
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  U PREND_LA_VALEUR 0.3
  N PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (U<0.99999) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    U PREND_LA_VALEUR sqrt(U)
    N PREND_LA_VALEUR N+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER N
FIN_ALGORITHME
```

c)

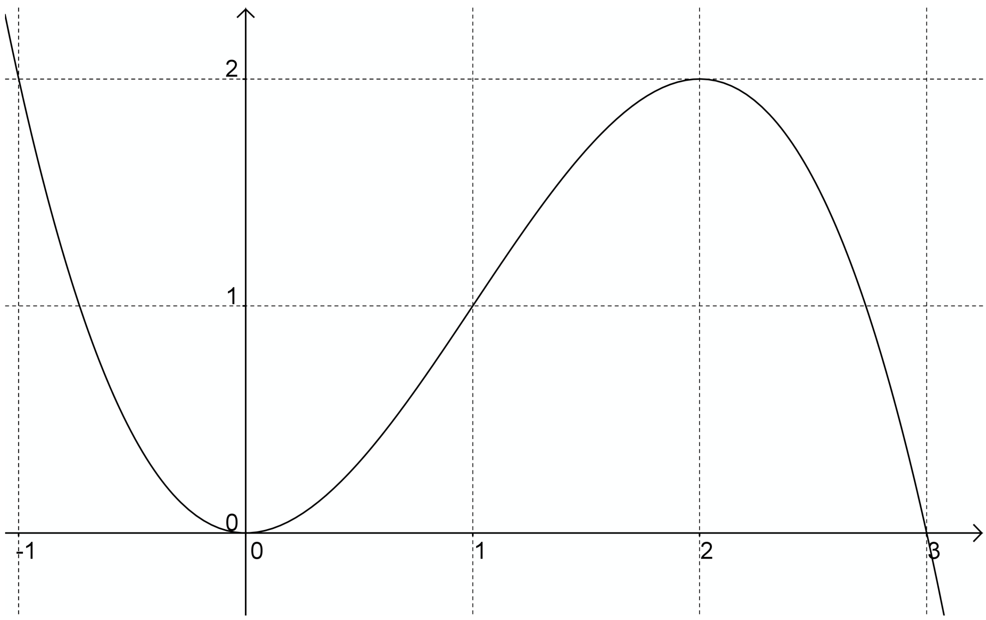
```
VARIABLES
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  S PREND_LA_VALEUR 0
  LIRE N
  POUR k ALLANT_DE 1 A N
    DEBUT_POUR
    S PREND_LA_VALEUR S+1/(k*k)
    FIN_POUR
  AFFICHER "S vaut : "
  AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

$\boxed{\text{II}}$ Soit u la suite définie par son terme initial $u_0 = 2,3$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = 0,7u_n + 0,5n - 1$.

Sur Algobox, modéliser un algorithme qui :
- demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n,
- calcule le terme de rang n de la suite u et l'affiche.

Faire une sortie imprimante et joindre celle-ci à votre devoir.

$\boxed{\text{III}}$ Soit u la suite définie par $u_0 \in [0; 2]$ et la relation : $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^3 + \frac{3}{2}u_n^2$.
Voici une partie du graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$:



On pourra utiliser sans démonstration le fait que f est croissante sur $[0; 2]$.
1) Faire des conjectures quant à la monotonie et la convergence de la suite u suivant que : $u_0 = 0$, $u_0 \in]0; 1[$, $u_0 = 1$, $u_0 \in]1; 2[$ ou $u_0 = 2$.
(Des traces de constructions sont attendues dans le repère ci-dessus : rendre l'énoncé.)
2) On suppose désormais que $u_0 = 0,5$.
2)a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \in [0; 1]$.
2)b) Prouver que (u_n) est décroissante (on pourra, en utilisant la croissance de f sur [0 ;2], établir par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$).
2)c) En notant que $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}u_n$.
2)d) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
2)e) Que peut-on en conclure ?