Correction de l'exercice n°4 de la feuille « Complexes : les bases ».

• Notons que pour que $Z = \dfrac{\overline{z} + 2\,\mathrm{i}}{\mathrm{i}z - 1}$ existe, il est nécessaire d'avoir $\mathrm{i}z - 1 \neq 0$, ce qui équivaut à $z \neq \frac{1}{\mathrm{i}} = -\,\mathrm{i}$. Le point M d'affixe z est donc implicitement différent du point A d'affixe $-\,\mathrm{i}$.

• **Méthode 1 :**

On a $Z = \dfrac{a - b\,\mathrm{i} + 2\,\mathrm{i}}{\mathrm{i}\,(a + b\,\mathrm{i}) - 1} = \dfrac{a + (2 - b)\,\mathrm{i}}{(-b - 1) + \mathrm{i}\,a} = \dfrac{[a + (2 - b)\,\mathrm{i}][(-b - 1) - \mathrm{i}\,a]}{[(-b - 1) + \mathrm{i}\,a][(-b - 1) - \mathrm{i}\,a]}$

d'où $Z = \dfrac{-a(b + 1) - \mathrm{i}\,a^2 + (b - 2)(b + 1)\,\mathrm{i} - a(2 - b)\,\mathrm{i}^2}{(-b - 1)^2 - (\mathrm{i}\,a)^2}$

$\Rightarrow Z = \dfrac{-ab - a + 2a - ab + [(b - 2)(b + 1) - a^2]\,\mathrm{i}}{(b + 1)^2 + a^2}$

$\Rightarrow Z = \underbrace{\dfrac{a - 2ab}{(b + 1)^2 + a^2}}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{\dfrac{b^2 - b - 2 - a^2}{(b + 1)^2 + a^2}}_{\in \mathbb{R}}\,\mathrm{i}$ $\quad$ ($\leftarrow$ forme algébrique de Z)

Donc Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathfrak{Re} z = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a - 2ab}{(b + 1)^2 + a^2} = 0 \Leftrightarrow a - 2ab = 0$

$$\Leftrightarrow a(1 - 2b) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ \text{ou} \\ b = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{Re} z = 0 \\ \text{ou} \\ \mathfrak{Im} z = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow$ M $\in [(O\overrightarrow{v}) \setminus \{\mathrm{A}\}] \cup \Delta$, où Δ est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

• **Méthode 2 :**

On a $\overline{Z} = \overline{\left(\dfrac{\overline{z} + 2\,\mathrm{i}}{\mathrm{i}z - 1}\right)} = \dfrac{\overline{\overline{z} + 2\,\mathrm{i}}}{\overline{\mathrm{i}z - 1}} = \dfrac{\overline{\overline{z}} + \overline{2\,\mathrm{i}}}{\overline{\mathrm{i}} \times \overline{z} - \overline{1}} = \dfrac{z - 2\,\mathrm{i}}{-\,\mathrm{i}\,\overline{z} - 1}$.

Donc Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{Z} = -Z \Leftrightarrow \dfrac{z - 2\,\mathrm{i}}{-\,\mathrm{i}\,\overline{z} - 1} = -\dfrac{\overline{z} + 2\,\mathrm{i}}{\mathrm{i}z - 1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{z - 2\,\mathrm{i}}{-\,\mathrm{i}\,\overline{z} - 1} = \dfrac{\overline{z} + 2\,\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}z}$

$\Leftrightarrow (z - 2\,\mathrm{i})(1 - \mathrm{i}z) = (-\,\mathrm{i}\,\overline{z} - 1)(\overline{z} + 2\,\mathrm{i})$

(en effet, comme $z \neq -\,\mathrm{i}$, ni $\mathrm{i}\,z - 1$, ni son conjugué $-\,\mathrm{i}\,\overline{z} - 1$ ne peuvent être nuls)

$\Leftrightarrow z - \mathrm{i}z^2 - 2\,\mathrm{i} - 2z = -\,\mathrm{i}\overline{z}^2 + 2\overline{z} - \overline{z} - 2\,\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow -z - \mathrm{i}\,z^2 = -\,\mathrm{i}\,\overline{z}^2 + \overline{z}$

$\Leftrightarrow \mathrm{i}\,\overline{z}^2 - \mathrm{i}\,z^2 - z - \overline{z} = 0$

$\Leftrightarrow\ \mathrm{i}\,(\overline{z}-z)(\overline{z}+z)-(z+\overline{z})=0$

$\Leftrightarrow\ (\overline{z}+z)\,[\,\mathrm{i}\,(\overline{z}-z)-1]=0$

$\Leftrightarrow\ (2\,\mathfrak{Re}\,z)\,[\,\mathrm{i}\,(-2\,\mathrm{i}\,\mathfrak{Im}\,z)-1]=0$

$\Leftrightarrow\ (\mathfrak{Re}\,z)(2\,\mathfrak{Im}\,z-1)=0$

$\Leftrightarrow\ (\mathfrak{Re}\,z=0\quad\text{ou}\quad\mathfrak{Im}\,z=\frac{1}{2})$

$\Leftrightarrow\ \mathrm{M}\in[(O\overrightarrow{v})\setminus\{\mathrm{A}\}]\cup\Delta$, où Δ est la droite d'équation $y=\frac{1}{2}$.