Correction de l'exercice n°18 p 31

1) On a $u_1 = \dfrac{5u_0 - 1}{u_0 + 3} = \dfrac{5 \times 2 - 1}{2 + 3} = \dfrac{9}{5}$; $u_2 = \dfrac{5u_1 - 1}{u_1 + 3} = \dfrac{5 \times \frac{9}{5} - 1}{\frac{9}{5} + 3} = \dfrac{8}{\frac{24}{5}} = \dfrac{5}{3}$ et $u_3 = \dfrac{5u_2 - 1}{u_2 + 3} = \dfrac{5 \times \frac{5}{3} - 1}{\frac{5}{3} + 3} = \dfrac{\frac{22}{3}}{\frac{14}{3}} = \dfrac{11}{7}$.

Donc $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = \dfrac{1}{2 - 1} = 1$; $v_1 = \dfrac{1}{u_1 - 1} = \dfrac{1}{\frac{9}{5} - 1} = \dfrac{1}{\frac{4}{5}} = \dfrac{5}{4} = 1,25$;
$v_2 = \dfrac{1}{u_2 - 1} = \dfrac{1}{\frac{5}{3} - 1} = \dfrac{1}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2} = 1,5$ et $v_3 = \dfrac{1}{u_3 - 1} = \dfrac{1}{\frac{11}{7} - 1} = \dfrac{1}{\frac{4}{7}} = \dfrac{7}{4} = 1,75$.

Ainsi $v_0 = 1$; $v_1 = 1,25$; $v_2 = 1,5$ et $v_3 = 1,75$. On peut donc conjecturer que la suite (v_n) est arithmétique de terme initial $v_0 = 1$ et de raison $r = 0,25$, c'est-à-dire que $v_n = v_0 + nr = 1 + 0,25n$. On peut donc faire l'hypothèse que $\dfrac{1}{u_n - 1} = 1 + 0,25n$, ce qui équivaut à $u_n - 1 = \dfrac{1}{1 + 0,25n}$, ou encore à $u_n = 1 + \dfrac{1}{1 + 0,25n} = \dfrac{2 + 0,25n}{1 + 0,25n} = \dfrac{4(2 + 0,25n)}{4(1 + 0,25n)}$, soit $u_n = \dfrac{8 + n}{4 + n}$.

2) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(n)$: $u_n = \dfrac{8 + n}{4 + n}$.

• **Initialisation :** on a $\dfrac{8 + 0}{4 + 0} = 2 = u_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{8 + n}{4 + n}$ donc $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3} = \dfrac{5 \times \frac{8+n}{4+n} - \frac{4+n}{4+n}}{\frac{8+n}{4+n} + \frac{12+3n}{4+n}} = \dfrac{\frac{36+4n}{4+n}}{\frac{20+4n}{4+n}} = \dfrac{36 + 4n}{20 + 4n} = \dfrac{9 + n}{5 + n}$, soit $u_{n+1} = \dfrac{8 + (n + 1)}{4 + (n + 1)}$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Cela prouve par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{8 + n}{4 + n}$.