Correction de la fin du polycopié « Suites définies implicitement : aspects graphiques (I) »

$\boxed{\mathbf{B}}$ **3)b)** Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la proposition : $s_n \leqslant \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

• **Initialisation :** on a $s_0 = v_0 - 2 = 5 - 2 = 3$ et $\dfrac{1}{3^{0-1}} = \dfrac{1}{3^{-1}} = 3$, donc $s_0 \leqslant \dfrac{1}{3^{0-1}}$, ce qui prouve que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité :** supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$.
On a $s_n \leqslant \dfrac{1}{3^{n-1}}$ donc $\dfrac{1}{3} \times s_n \leqslant \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3^{n-1}}$ (car $\dfrac{1}{3} > 0$), d'où $\dfrac{1}{3}s_n \leqslant \dfrac{1}{3^{1+n-1}} = \dfrac{1}{3^n}$. Or d'après la question précédente, on a $s_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{3}s_n$, par conséquent $s_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{3^n}$, soit $s_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{3^{(1+n)-1}}$, ce qui établit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• On a donc prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leqslant \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

$\boxed{\mathbf{B}}$ **3)c)** • D'après B.2.a., on sait que $v_n \in]2; +\infty[$, donc $2 \leqslant v_n$.
• D'après B.3.b., on a $s_n \leqslant \dfrac{1}{3^{n-1}}$, soit $v_n - 2 \leqslant \dfrac{1}{3^{n-1}}$ et finalement $v_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

• **Bilan :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{3^{n-1}}$, soit $2 \leqslant v_n \leqslant 2 + 3 \times \dfrac{1}{3^n}$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 = 2$ et comme $\dfrac{1}{3} \in]-1; 1[$, on a par produit et somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 + 3 \times \dfrac{1}{3^n}\right) = 2 + 3 \times 0 = 2$. Le théorème « des gendarmes » entraîne alors que (v_n) converge vers 2.