Correction des exercices n°42$^{a)c)}$ et 43$^{a)c)}$ pp 118-119

42

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{1}{n}(n^2+10) = \dfrac{n^2}{n} + \dfrac{10}{n} = n + \dfrac{10}{n}$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \\ \bullet \text{ par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{10}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(10 \times \frac{1}{n}\right) = 10 \times 0 = 0 \end{array}\right\} \text{d'où par somme : } \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{n^2-2n+3}{4n^3+5} = \dfrac{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(4n+\frac{5}{n^2}\right)} = \dfrac{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{4n+\frac{5}{n^2}}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{n} = -2 \times 0 = 0 \\ \bullet \text{ par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n^2} = 3 \times 0 = 0 \end{array}\right\} \text{d'où par somme } \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right) \underbrace{=}_{(\natural)} 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} 4n = +\infty \\ \bullet \text{ par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n^2} = 5 \times 0 = 0 \end{array}\right\} \text{d'où par somme } \lim_{n\to+\infty} \left(4n+\frac{5}{n^2}\right) \underbrace{=}_{(\star)} +\infty$$

On déduit de $(\natural)$ et $(\star)$ par quotient que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Remarque : on pouvait également mettre en facteur n^3 en haut et en bas ou même mettre en facteur n^2 en haut et n^3 en bas.

43

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{5^n+3^n}{4^n} = \dfrac{5^n}{4^n} + \dfrac{3^n}{4^n} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^n + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

Or $\dfrac{5}{4} \in]1;+\infty[$ et $\dfrac{3}{4} \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{4}\right)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$.

On déduit par somme que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5^n+3^n}{4^n} = +\infty$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $4^n - 2^n = 4^n\left(1-\dfrac{2^n}{4^n}\right) = 4^n\left[1-\left(\dfrac{2}{4}\right)^n\right] = 4^n\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$.

On a $\frac{1}{2} \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 1 - 0 \underbrace{=}_{\natural} 1$.

Comme $4 \in]1;+\infty[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n \underbrace{=}_{(\star)} +\infty$. On déduit de $(\star)$ et $(\natural)$ par produit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (4^n - 2^n) = +\infty$.