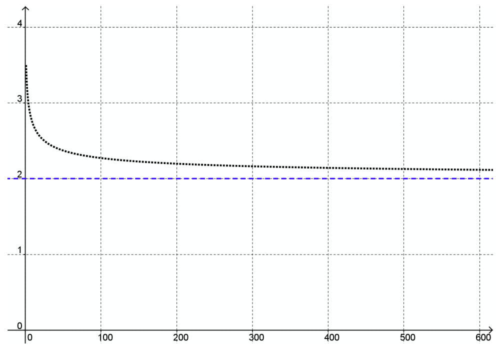
Correction du III de la feuille « Limite d'une suite, aspects théoriques »

a) On constate que $w_{100} = \dfrac{25}{11} \approx 2,2727$; $w_{10\,000} = \dfrac{205}{101} \approx 2,0297$; $w_{1\,000\,000} = \dfrac{2005}{1001} \approx 2,003$; $w_{100\,000\,000} = \dfrac{20005}{10001} \approx 2,0003$, etc.
Voici l'allure de la représentation graphique de la suite w :



$\hookrightarrow$ Il semble que w_n se rapproche aussi près qu'on veut de 2, dès que n devient assez grand.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $5 > 2$ donc $2\sqrt{n}+5 > 2\sqrt{n}+2$ d'où $\dfrac{2\sqrt{n}+5}{\sqrt{n}+1} > \dfrac{2\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+1}$ (car $\sqrt{n}+1>0$), soit $w_n > 2$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$; $w_n \in]1,99\,;\,2,01[\;\Leftrightarrow\; \underbrace{1,99 < w_n}_{\text{vrai d'après b)}} < 2,01 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{2\sqrt{n}+5}{\sqrt{n}+1} < 2,01$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{car } \sqrt{n}+1>0} \; 2\sqrt{n}+5 < 2,01(\sqrt{n}+1) \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{n}+5 < 2,01\sqrt{n}+2,01 \;\Leftrightarrow\; 0,01\sqrt{n} > 2,99$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{car } 100>0} \; \sqrt{n} > 299 \;\Leftrightarrow\; n > 299^2$ par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0;+\infty[$.

$\hookrightarrow$ Ainsi, en posant $N_0 = 299^2 + 1 = 89402$, on a bien $w_n \in]1,99\,;\,2,01[$ dès que $n \geqslant N_0$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$; $w_n \in]2-\varepsilon\,;\,2+\varepsilon[\;\Leftrightarrow\; \underbrace{2-\varepsilon < w_n}_{\text{vrai d'après b)}} < 2+\varepsilon \;\Leftrightarrow\; \dfrac{2\sqrt{n}+5}{\sqrt{n}+1} < 2+\varepsilon$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{car } \sqrt{n}+1>0} \; 2\sqrt{n}+5 < (2+\varepsilon)(\sqrt{n}+1) \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{n}+5 < (2+\varepsilon)\sqrt{n}+2+\varepsilon \;\Leftrightarrow\; \varepsilon\sqrt{n} > 3-\varepsilon$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{car } \varepsilon>0} \; \sqrt{n} > \dfrac{3-\varepsilon}{\varepsilon}$ $(\star)$

Remarquons que si $\varepsilon > 3$, on a $\dfrac{3-\varepsilon}{\varepsilon} < 0$ et $(\star)$ est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\varepsilon \leqslant 3$, de sorte que $\dfrac{3-\varepsilon}{\varepsilon} \geqslant 0$; on a alors $(\star) \;\Leftrightarrow\; n > \left(\dfrac{3-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2$ par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0;+\infty[$.

$\hookrightarrow$ Ainsi en choisissant pour N un entier strictement supérieur à $\left(\dfrac{3-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2$, on a bien :

$$w_n \in]2-\varepsilon\,;\,2+\varepsilon[\quad , \quad \text{dès que } n \geqslant N \; .$$