Trigonométrie : quelques exercices d'entraînement (bases)

I Déterminer le cosinus et le sinus de chacun des réels suivants :

- $\frac{2013\pi}{4}$
- $-\frac{2015\pi}{3}$

II Résoudre dans chaque intervalle I l'équation : $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$.

a) $\mathrm{I} = [0; 2\pi]$ **b)** $\mathrm{I} = [-\pi; \pi]$ **c)** $\mathrm{I} = [-2\pi; 2\pi]$ **d)** $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ **Indication :** on pourra poser $X = \cos x$.

III Résoudre dans $[0; 2\pi]$ les inéquations :

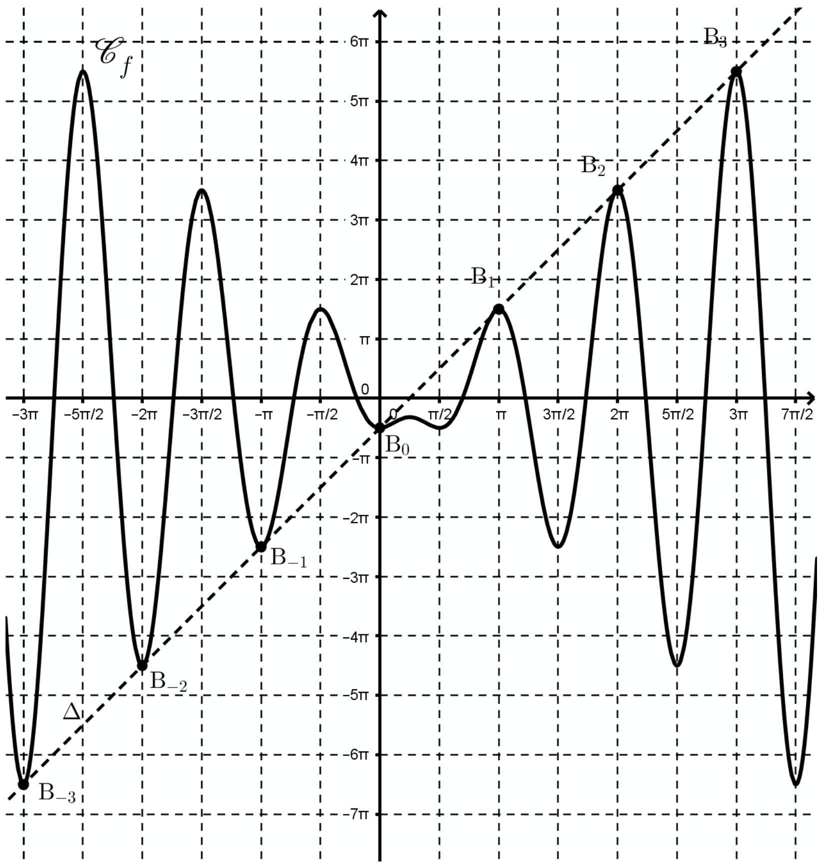
a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{1}{2}$ **b)** $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

IV **a)** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ est $\frac{2\pi}{3}-$périodique puis étudier les variations de f sur $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

b) Montrer que la fonction $g : x \mapsto 3\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ est $4\pi-$périodique puis étudier les variations de g sur $[0; 4\pi]$. Tracer alors la représentation graphique de g sur l'intervalle $[-4\pi; 8\pi]$ (choisir une échelle adaptée).

V On a représenté ci-dessous un morceau du graphe $\mathscr{C}_f$ de la fonction :

$$f : x \mapsto \left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\cos(2x) - \sin(2x) .$$



Δ désigne la droite d'équation $y = 2x - \frac{\pi}{2}$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note B_k le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $k\pi$.

1. (a) Montrer que $B_1 \in \Delta$.
   (b) Plus généralement, prouver que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $B_k \in \Delta$.
2. (a) Calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$
   (b) Conjecturer le tableau des variations de f sur $[0; \pi]$.
3. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (\pi - 4x)\sin(2x)$.
   (b) Valider alors rigoureusement la conjecture faite au 2).