Correction des exercices II.2. et IV.1. de la feuille « Fonctions sin et cos »

$\boxed{\text{II}}$ **2)a)** Si $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x+4\pi) = \sin\left(\frac{x+4\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)$. Or la fonction sin est $2\pi-$périodique donc $g(x+4\pi) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) = g(x)$, ce qui prouve que la fonction g est $4\pi-$périodique.

2)b) Par composition, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \frac{1}{2}\sin'\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$. Comme $\frac{1}{2} > 0$, $g'(x)$ est du signe de $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ que l'on obtient grâce au tableau suivant :

x	0		π		3π		4π
$t = \frac{x}{2}$	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos t$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient finalement :

x	0		π		3π		4π
			1				0
g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	0				-1		

Détails : $g(0) = \sin\left(\frac{0}{2}\right) = \sin 0 = 0$; $g(\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $g(3\pi) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ et : $g(4\pi) = \sin\left(\frac{4\pi}{2}\right) = \sin 2\pi = 0$.

$\boxed{\text{IV}}$ **1)a)** Si $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+\pi) = \sin\left[2(x+\pi) - \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$. Or la fonction sin est $2\pi-$périodique donc $f(x+\pi) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$, ce qui prouve que la fonction f est $\pi-$périodique.

1)b) Par composition, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2\sin'\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Comme $2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ que l'on obtient grâce au tableau suivant :

x	0		$\frac{5\pi}{12}{}^\star$		$\frac{11\pi}{12}{}^\natural$		π
$t = 2x - \frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{3}$
$\cos t$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Détails :

$(\star)$ $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12}$

$(\natural)$ $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2} = \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{11\pi}{12}$

On obtient finalement :

x	0		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
f	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Détails :

$f(0) = \sin\left(2 \times 0 - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(2 \times \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;
$f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(2 \times \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ et $f\left(\pi\right) = \sin\left(2 \times \pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.