

Correction des exercices II.2. et IV.1. de la feuille « Fonctions sin et cos »

II 2)a) Si $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x + 4\pi) = \sin\left(\frac{x+4\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right)$. Or la fonction sin est 2π -périodique donc $g(x + 4\pi) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) = g(x)$, ce qui prouve que la fonction g est 4π -périodique.

2)b) Par composition, la fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = \frac{1}{2} \sin'\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$. Comme $\frac{1}{2} > 0$, $g'(x)$ est du signe de $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ que l'on obtient grâce au tableau suivant :

x	0	π	3π	4π
$t = \frac{x}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos t$	+	0	-	0
		+	0	+

On obtient finalement :

x	0	π	3π	4π
g		1		0
		↗	↘	↗
	0		-1	

Détails : $g(0) = \sin\left(\frac{0}{2}\right) = \sin 0 = 0$; $g(\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $g(3\pi) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ et : $g(4\pi) = \sin\left(\frac{4\pi}{2}\right) = \sin 2\pi = 0$.

IV 1)a) Si $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x + \pi) = \sin\left[2\left(x + \pi\right) - \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3} + 2\pi\right)$. Or la fonction sin est 2π -périodique donc $f(x + \pi) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = f(x)$, ce qui prouve que la fonction f est π -périodique.

1)b) Par composition, la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 2 \sin'\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Comme $2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ que l'on obtient grâce au tableau suivant :

x	0	$\frac{5\pi}{12}$ [*]	$\frac{11\pi}{12}$ [†]	π
$t = 2x - \frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
$\cos t$	+	0	-	0
		+	0	+

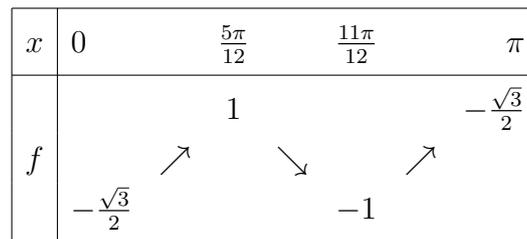
Détails :

(*) $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12}$

(†) $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2} = \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{11\pi}{12}$

On obtient finalement :

x	0	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
f	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$



Détails :

$$f(0) = \sin\left(2 \times 0 - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} ; \quad f\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(2 \times \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 ;$$

$$f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(2 \times \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \quad \text{et} \quad f(\pi) = \sin\left(2 \times \pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$